Sammlung Göschen

Graphische Statik

esonderer Berücksichtigung der Einflußlinien

Von

Dipl.-Ing. Otto Henkel

ngenieur und Oberlehrer an der Baugewerkschule in Magdeburg

II. Teil

Durchgehende Gelenkträger. Dreigelenkbogen. Formänderungen gerader Träger. Durchgehende (kontinuierliche) Träger. Formänderungen gebogener Träger. Zweigelenkbogen. Eingespannter Bogen. Erddruck und Wasserdruck

Mit 86 Figuren

Neudruck



Berlin und Leipzig

Vereinigung wissenschaftlicher Verleger

Walter de Gruyter & Co.

mals G. J. Göschen'sche Verlagshandlung — J. Guttentag, Verlags-
handlung — Georg Reimer — Karl J. Trübner — Veit & Comp.

1919

Druck von

Inhaltsverzeichnis.

VI. Abschnitt.
Die Formänderungen (Durchbiegungen) einfacher ebener Fachwerkträger.

VII. Abschnitt.
Die durchgehenden (kontinuierlichen) vollwandigen Träger.

VIII. Abschnitt.
Die durchgehenden Fachwerkträger.

IX. Abschnitt.
Die Formänderungen vollwandiger Bogenträger.

X. Abschnitt.
Formänderungen gebogener Fachwerkträger.

XI. Abschnitt.

Der vollwandige Zweigelenkbogen.

XII. Abschnitt.

Der Zweigelenkfachwerkbogen.

XIII. Abschnitt.

e eingespannten vollwandigen und fachwerkartigen Bogenträger.

XIV. Abschnitt.

Erddruck und Wasserdruck.

Literaturverzeichnis.

Bauschinger, F., Elemente der graphischen Statik. München
Clarke, G. S., The principles of graphic statics. London
Cremona, L., Le figure reciproche nella statica grafica.
land 1879.
Culmann, C., Die graphische Statik. Zürich 1875.
Eddy, H. T., Neue Konstruktionen aus der graphischen S
Leipzig 1880.
Engesser, F., Autographien über Statik und Brückenbau. Karls
Ewerding, G., Lehrbuch der Graphostatik. Stuttgart und L
1906.
Favare, A., Lezione di statica grafica. Padua 1877.
Föppl, A., Graphische Statik. Leipzig 1900.
Henneberg, L., Die graphische Statik der starren Sys
Leipzig und Berlin 1911.
Hollender, H. F., Über eine neue graphische Methode der
sammensetzungen von Kräften und ihre Anwendung zur
phischen Bestimmung von Schwerpunkten, statischen Mome
und Trägheitsmomenten ebener Gebilde. Leipzig 1896.
Keck, W., Vorträge über graphische Statik. Hannover 1894.
Landsberg, Th., Das Verfahren der Einflußlinien. Berlin
Lauenstein, R., Die graphische Statik. Stuttgart 1906.
Lederer, A., Analytische Ermittelung und Anwendung von
flußlinien einiger im Eisenbetonbau häufig vorkomme
statisch unbestimmter Träger. Berlin 1908.
Lévy, M., La statique graphique et ses applications aux
structions. Paris 1886—1888 und 1907.
Maurer, M., Statique graphique appliquée aux construct
toitures, planchers, poutres, ponts etc. Paris 1882.
Mayor, B., Statique graphique des systèmes de l'espace.
sanne 1910.
Mehrtens, G. Chr., Vorlesungen über die Statik der Ba
struktionen. Leipzig 1903—1905.
Mohr, O., Abhandlungen aus dem Gebiete der techni
Mechanik. Berlin 1906.
Müller-Breslau, H. F. B., Die graphische Statik der
konstruktionen. Leipzig 1887, 1892, 1908.
Nehls, Chr., Über graphische Integration und ihre Anwendun
der graphischen Statik. Leipzig 1885.

Ostenfeld, A., Technische Statik. Aus dem Dänischen übersetzt. Leipzig 1904.
Ott, K. v., Die Grundzüge des graphischen Rechnens und der graphischen Statik. Prag 1879—1885.
Otzen, R., Praktische Winke zum Studium der Statik. Wiesbaden 1911.
Ritter, W., Anwendungen der graphischen Statik. Zürich 1888 bis 1906.
Saviotti, C., La statica grafica. Mailand 1888.
Schlotke, J., Lehrbuch der graphischen Statik. Hamburg 1887.
Steiner, F., Die graphische Zusammensetzung der Kräfte. Wien 1876.
Timerding, H. E., Die Theorie der Kräftepläne. Eine Einführung in die graphische Statik. Leipzig und Berlin 1910.
Vierendeel, A., Cours de stabilité des constructions. Louvain et Paris 1901—1907.
Vonderlinn, J., Statik für Hoch- und Tiefbautechniker. Bremerhaven 1902.
Wenk, J., Die graphische Statik. Berlin 1879.
Wilda, E., Graphische Mathematik und ihre Verwendung im Dienste der technischen Mechanik. Brünn.
Wittmann, W., Statik der Hochbaukonstruktionen. Berlin 1879 bis 1884.
Zillich, K., Statik für Baugewerkschulen. Berlin 1903—1905.

Kötter, F., Die Entwicklung der Lehre vom Erddruck. Berlin 1893
Möller, M., Erddrucktabellen mit Erläuterungen über Erddruck und Verankerungen. Leipzig 1902.
Müller-Breslau, H. F., Erddruck auf Stützmauern. Stuttgart 1906.
Poncelet, Über die Stabilität der Erdbekleidungen und deren Fundamente. Aus dem Französischen übersetzt. Braunschweig 1844.
Rankine, On the stability of loose earth. London 1857.
Rebhann, G., Theorie des Erddrucks und der Futtermauern, Wien 1871.
Winkler, E., Neue Theorie des Erddrucks. Wien 1872.

I. Abschnitt.

Die durchgehenden vollwandigen Gelenkträger (Gerberträger).

§ 1. Allgemeine Betrachtungen.

Ein über mehr als 2 Stützen ungestoßen durchgehender Träger wird als **durchgehender (kontinuierlicher) Träger** bezeichnet. Wird ein solcher Träger auf r Stützen aufgelagert [ein Kipp- und (r — 1) Rollenlager], so findet man, daß er mit dem Baugrund durch [2 + (r — 1)] starre Verbindungsstäbe zusammenhängt. Nach der im I. Teil, § 23 gegebenen Formel (34) sind zur statisch bestimmten Verbindung von 2 Scheiben nur 3 starre Stäbe erforderlich, die einem Kipp- und einem Rollenlager entsprechen. Mithin sind im vorliegenden Fall [2 + (r — 1)] — 3 = r — 2 überzählige Stäbe vorhanden, also genau so viel als Mittelstützen vorhanden sind, und der Träger ist (r — 2) fach statisch unbestimmt.

Jeder auf r Stützen ruhende, statisch unbestimmte Träger kann durch Einfügung von (r — 2) Mittelgelenken statisch bestimmt gemacht werden, von denen aber nur höchstens 2 auf einen zwischen 2 Stützen liegenden Trägerabschnitt (Öffnung) entfallen dürfen; außerdem muß jeweils ein Trägerabschnitt mit Gelenken mit einem solchen ohne Gelenke abwechseln, weil sonst die Trägerverbindung beweglich (labil) wird.

In Fig. 1 ist ein durchgehender Träger auf r = 5 Stützen gegeben, der mit (r — 2) = 3 Gelenken ausgestattet ist und daher aus 4 Tragscheiben besteht. Nimmt man als fünfte die Erdscheibe hinzu, so sind nach Teil I, § 23, Formel 34 zu ihrer statisch bestimmten Verbindung

$$s = (n - 1)\,3 = (5 - 1) \cdot 3 = 12$$

Verbindungsstäbe erforderlich. Das Kipplager sowie jedes Gelenk entspricht je 2 Verbindungsstäben, während jedes Rollenlager nur einen Verbindungsstab darstellt, mithin sind in Fig. 1

$$4 \cdot 2 + 4 \cdot 1 = 12$$

Stäbe vorhanden, und damit ist die statische Bestimmtheit erwiesen.

Ein Träger nach Fig. 1 wird als **durchgehender Gelenkträger** oder nach dem Erfinder kürzer als **Gerber**-

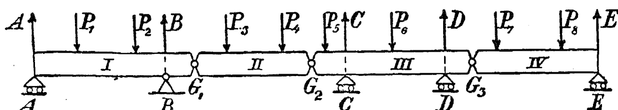


Fig. 1.

träger bezeichnet. Die Stücke I und III nennt man **Kragträger** oder **Auslegerträger** und die Stücke II und IV **Koppelträger** oder **eingehängte Träger**.

Die eingehängten Träger verhalten sich genau so wie einfache Träger und sind demgemäß wie im I. Teil, § 24 u. 25 zu behandeln.

§ 2. Der Gerberträger mit ruhender Belastung.

1. Unmittelbare Belastung durch parallele Einzelkräfte.

a) **Momente.** Die Untersuchung eines Gerberträgers läßt sich immer auf diejenige eines Trägers mit überstehenden Enden (Teil G_2 G_3 in Fig. 1) zurückführen. In Fig. 2 ist ein derartiger Träger C D mit beliebigen lotrechten Einzellasten dargestellt. Die Einzellasten sind in bekannter Weise zu einem Kräftezug $\overline{ab}$ an einander getragen, und dazu ist mit beliebiger Polweite H das Seileck I II III ... VI gezeichnet, dessen nach rückwärts verlängerten, äußersten Seiten die Auflagerlotrechten in den Punkten A′ und B′ schneiden. Die zur Schlußlinie A′B′ = s′ vom Pol O aus gezogene Parallele s schneidet den Kräftezug im Punkt t und legt die Auflager-

widerstände des Trägers AB fest; es ist $\overline{at} = A$ und $\overline{tb} = B$. Die von dem Seileck I II III...VI und der Schlußlinie A′B′ eingehüllte schraffierte Fläche stellt die Momentenfläche des Trägers mit überstehenden Enden dar, deren Ordinaten, je nachdem sie unter oder über der Schlußlinie liegen, positiv oder negativ sind (vgl. I. Teil, § 24, Beispiel 6) Für den im

Fig. 2.

beliebigen Schnitt s — s liegenden Trägerpunkt T wird das Moment (Feldmoment)

$$M_s = H \cdot y_s.$$

Auf den Auflagerlotrechten schneidet das Seileck die Ordinaten $A'A'' = y_a$ bzw. $B'B'' = y_b$ aus, mithin werden die Stützenmomente

$$M_a = H \cdot y_a \quad \text{bzw.} \quad M_b = H \cdot y_b,$$

wobei aber die Vorzeichen der Ordinaten zu beachten sind.

Die Verbindungslinie $A''B'' = s''$ bildet mit dem Seileck I II III...IV die Momentenfläche eines einfachen Trägers AB, der im Punkt T das Moment

$$\mathfrak{M} = H \cdot \mathfrak{y}$$

besitzt. Wird nun die Gerade A'B'' gezogen, so folgt aus Fig. 2

$$y_s = \mathfrak{y} - y_a \frac{b}{l} - y_b \frac{a}{l};$$

hieraus wird nach Multiplikation mit H

$$H\, y_s = H\, \mathfrak{y} - H\, y_a \frac{b}{l} - H\, y_b \frac{a}{l}$$

oder

$$(1) \qquad M_s = \mathfrak{M} - M_a \frac{b}{l} - M_b \frac{a}{l}.$$

Dieser Gleichung entspricht die in Fig. 2 schraffierte Momentenfläche mit den Momentennullpunkten N_1 und N_2.

Gibt man dem Träger über N_1 und N_2 Gelenke, so wird sein Gleichgewichtszustand nicht gestört (aber labil) und damit erhält man ein einfaches Verfahren zur Bestimmung der Momente eines Gerberträgers.

Die auf den einzelnen Stücken (Öffnungen) zwischen je 2 aufeinanderfolgenden Stützen eines Gerberträgers (Fig. 3) befindlichen Kräfte werden jeweils für sich zu einem Krafteck mit gleichbleibender Polweite H zusammengesetzt, und zu diesen Kraftecken werden die (gestrichelten) Seilecke aneinander schließend gezeichnet. Die Lotrechten durch die Gelenke G_1 und G_2 schneiden das entsprechende Seileck in den Punkten G_1' und G_2' und da in diesen Punkten das Moment Null sein muß, so ist die zugehörige Schlußlinie $B'C' = s_2'$ festgelegt. Außerdem muß auch im Endpunkt A das Moment gleich Null sein. und damit ist die weitere Schlußlinie $A'B' = s_1'$ bestimmt, Verlängert man schließlich in der letzten Öffnung CD die äußerste Seileckseite bis zum Schnitt D' mit der Auflagerlotrechten durch D, so ist auch die letzte Schlußlinie $C'D' = s_3'$ festgelegt, und damit ist die ganze Momentenfläche gefunden (Fig. 3a). In vielen Fällen ist es erwünscht, daß alle Schluß-

linien in einer Wagerechten liegen. Nach dem I. Teil, S. 66, Fig. 61 erhält man durch Verlegung der Pole den wagerechten Linienzug s_1 s_2 s_3 nebst der schraffierten Momenten-

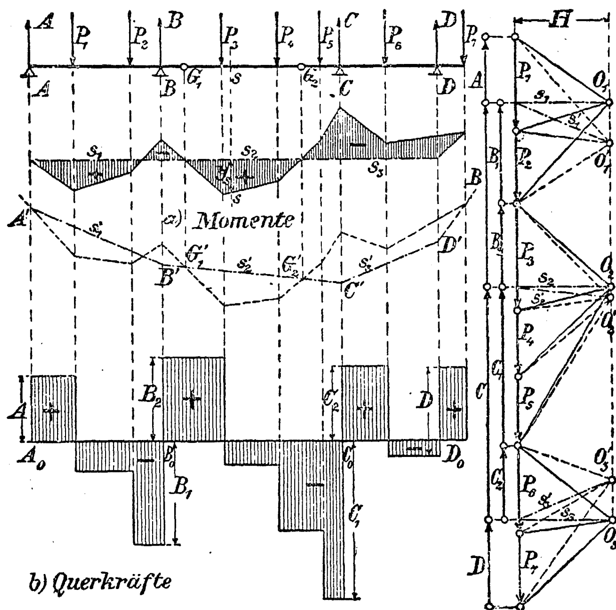


Fig. 3.

fläche. An beliebiger Stelle s — s ergibt sich aus letzterer die Ordinate y_s und damit das Moment $M_s = H \cdot y_s$.

b) Querkräfte und Auflagerwiderstände. Die in den Gelenken wirkenden Querkräfte bzw. Gelenkdrücke heben sich gegenseitig auf und treten in der Querkraftsfläche nicht besonders hervor. Mithin kann die Querkraftsfläche ohne

Rücksicht auf die Gelenke dargestellt werden, indem man die zu den einzelnen Trägerstücken gehörenden Kräfte und Auflagerwiderstände dem entsprechenden Krafteck entnimmt und senkrecht zu einer Geraden $A_0B_0C_0D_0$ aufträgt, wie Fig. 3 b zeigt.

Die Auflagerwiderstände lassen sich ohne weiteres dem Krafteck in Fig. 3 entnehmen. Da jedes durch Gelenke begrenzte Trägerstück für sich im Gleichgewicht sein muß, so ergibt sich sofort, daß die durch die Schlußlinien s_1, s_2 und s_3 abgeschnittenen Teile des Kräftezuges die Auflagerdrücke darstellen.

2. Unmittelbare stetige Belastung.

a) Momente. Ersetzt man die gleichmäßig über einen Gerberträger verteilte stetige Belastung durch viele nebeneinanderstehende, sehr kleine Einzelkräfte, so kommt man auf das unter 1 gegebene Verfahren zurück, wie Fig. 4 zeigt.

Die auf den einzelnen Trägerstücken (Öffnungen) ruhende gleichmäßige Belastung ist jeweils zu einer Mittelkraft zusammenzufassen, wodurch die Einzellasten Q_1, Q_2 bis Q_4 entstehen. Mit gleichbleibender Polweite H ist sodann an einen wagerecht gelegten Schlußlinienzug $s_0 - s_0$ (Fig. 4 a) zu jeder Einzellast ein Seileck zu zeichnen, dessen beide Seiten die der gleichmäßigen Belastung entsprechende Momentenparabel berühren (vgl. I. Teil, Fig. 64). Die Punkte S_1, S_2 und S_3, die in halber Höhe der Seilecke liegen, sind die Scheitel dieser (gestrichelten) Momentenparabeln. Mit den Scheitelpunkten ermittelt man, gemäß Teil I, § 3, 1, die den Gelenken G_1 und G_3 entsprechenden Parabelpunkte P_1 und P_3, und damit sind die Momentennullpunkte gegeben, die den Schlußlinienzug $s_1' s_2' s_3'$ festlegen, dessen letzter Punkt D′ durch die zu Q_4 gehörende äußerste Seileckseite bestimmt ist. Trägt man schließlich nach bekanntem Verfahren (Teil I, Fig. 61) die Seilecke mit ihren Momentenparabeln an einen wagerechten

Schlußlinienzug $s_1\, s_2\, s_3$, so ergibt sich die in Fig. 4a schraffierte Momentenfläche.

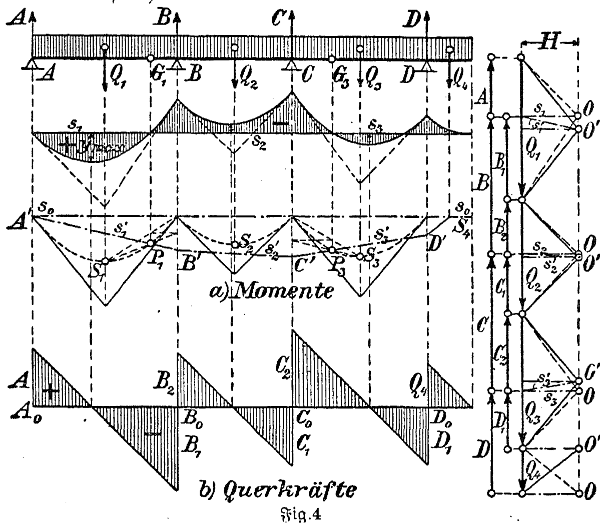


Fig. 4

b) Querkräfte und Auflagerwiderstände. Die den einzelnen Auflagerpunkten entsprechenden Querkräfte sind wie unter 1 b dem Krafteck zu entnehmen. In Fig. 4 b sind diese Werte senkrecht zu der Geraden $A_0B_0C_0D_0$ aufgetragen und durch geneigte Geraden verbunden, die die schraffierte Querkraftsfläche begrenzen.

Die Auflagerwiderstände sind wieder dem Krafteck zu entnehmen, wo sie durch die Schlußlinien $s_1\, s_2$ und s_3 abgeschnitten werden.

Bei Gerberträgern mit zusammengesetzter oder mit mittelbarer Belastung verfährt man ebenso wie bei den einfachen Trägern (vgl. I. Teil, § 24, 3 und 4).

§ 3. Der Gerberträger mit beweglicher Belastung.

1. Unmittelbare Belastung durch eine Einzellast.

Die Einwirkung beweglicher Belastung auf den Gerberträger wird am einfachsten mittels Einflußlinien untersucht (vgl. I. Teil, § 27).

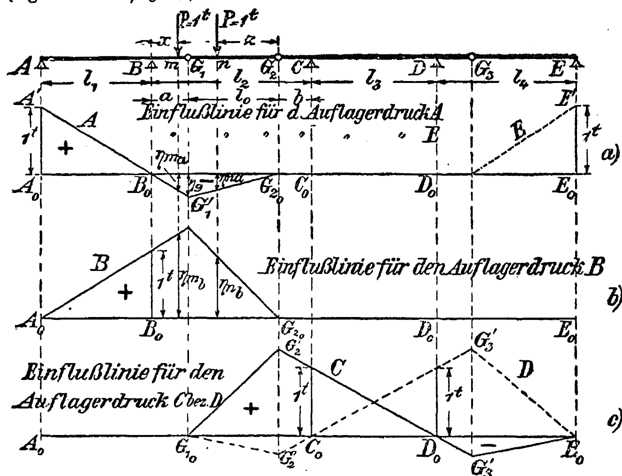


Fig. 5.

a) Einflußlinien der Auflagerdrücke (=widerstände). Auflagerdruck A. Wandert in Fig. 5 die Last P = 1 t von B nach A, so ist die Einflußlinie für den Auflagerdruck A gleich derjenigen eines einfachen Trägers AB (vgl. I. Teil, § 27, 1, Fig. 90); sie ist eine Gerade $A'B_0$, die über A_0 durch die Ordinate $A_0A' = 1$ t festgelegt ist. Tritt jedoch die Last auf den Kragarm BG_1, so entsteht in A ein negativer Auflagerdruck

$$A = -\frac{1 \cdot x}{l_1} = \eta_{m_a}. \tag{2}$$

Auch hier gibt von den an η gesetzten Zeigern m die Laststelle und a die Wirkungsstelle an. Vorstehende Gleichung stellt für die Veränderliche x eine Gerade B_0G_1' dar, die die Fortsetzung der Geraden $A'B_0$ bildet, denn aus Fig. 5 a folgt, wenn die negativen Ordinaten η_{m_a} unterhalb der Tragwerkslinie angetragen werden, $-\eta_{m_a} : x = 1 : l_1$ oder $\eta_{m_a} = -\frac{1 \cdot x}{l_1}$.
Befindet sich die Last P = 1 t auf dem eingehängten Träger G_1G_2, so entsteht zunächst ein Gelenkdruck $G_1 = \frac{1 \cdot z}{l_0}$, der einen negativen Auflagerdruck in A erzeugt von

$$(3) \qquad A = -\frac{G_1 a}{l_1} = -\frac{1 \cdot z \cdot a}{l_0 \cdot l_1} = \eta_{n_a}.$$

Durch diese Gleichung ist die Gerade $G_1'G_{2_0}$ bestimmt, denn aus Fig.5a folgt $-\eta_g : -\eta_{n_a} = l_0 : z$ oder $\eta_{n_a} = \frac{\eta_g \cdot z}{l_0}$.
Da aber $-\eta_g : a = 1 : l_1$ oder $\eta_g = -\frac{1 \cdot a}{l_1}$ ist, so wird $\eta_{n_a} = -\frac{1 \cdot z \cdot a}{l_0 l_1}$, wie oben in (3).

Steht die Last P = 1 t rechts von G_2, so bleibt sie ohne Einfluß auf den Auflagerdruck A, mithin wird dessen Einflußlinie nur durch die gebrochene Linie $A'G_1'G_{2_0}$ dargestellt.

Für die Auflagerdrücke B, C, D, E lassen sich in ähnlicher Weise einfache Gleichungen aufstellen, wie sie die Formeln (2) und (3) zeigen, und damit können die entsprechenden Einflußlinien gezeichnet werden, ohne daß sie einer weiteren Erläuterung bedürfen. In Fig. 5 a—c sind diese Einflußlinien dargestellt, wobei diejenigen für D und E gestrichelt sind. Bezüglich des Gebrauches der Einflußlinien sei auf den I. Teil, S. 102, Beispiel 9 verwiesen.

b) **Einflußlinien der Querkräfte. Querschnitt F_1 in der Öffnung AB** (Fig. 6 a). Befindet sich die Last $P = 1$ t zwischen den Stützen A und B, so stimmt die Einflußlinie für die Querkraft Q_{F_1} mit derjenigen eines einfachen Trägers AB überein (vgl. I. Teil, § 27 b, Fig. 91). Tritt jedoch die Last auf den Kragarm BG_1, so entsteht in A ein negativer Auflagerdruck, der nach Formel (2) $A = -\frac{1 \cdot x}{l_1} = \eta_{m'}$ ist. Befindet sich die Last auf dem eingehängten Träger G_1G_2, so wird nach Formel (3) $A - \frac{1 \cdot z \cdot a}{l_0 \cdot l_1} = \eta_{n_a}$. Daraus erkennt man, daß die Einflußlinie für Q_{F_1} für alle rechts vom Auflager B gelegenen Teile mit derjenigen des Auflagerdruckes A übereinstimmt, und daß sie dieser entsprechend gezeichnet werden kann (Fig. 6 a).

Querschnitt F_2 im Kragarm BG_1 (Fig. 6 b). Alle links von F_2 befindliche Lasten sind ohne Einfluß auf die Querkraft in F_2. Befindet sich jedoch die Last $P = 1$ t auf dem Kragarm rechts von F_2, so erhält man stets $Q_{F_2} = +1$ t, somit ist die Einflußlinie für die Strecke F_2G_1 eine zur Tragwerkslinie B_0C_0 parallele Gerade $F_2'G_1'$ (Fig. 6 b). Tritt die Last auf den angehängten Träger, so wird die Querkraft in F_2 gleich dem Gelenkdruck in G_1, also

$$(4) \qquad Q_{F_2} = G_1 = \frac{1 \cdot z}{l_0} = \eta_{n_q}.$$

Dieser Gleichung entspricht die Gerade $G_1'G_{2_0}$, wie ohne weiteres aus Fig. 6 b zu ersehen ist. Mithin besteht die Einflußlinie für die Querkraft Q_{F_2} aus der geknickten Geraden $F_2'G_1'G_{2_0}$.

Querschnitt F_3 in der Öffnung CD (Fig. 6 c). Diese Querkraft wird ebenso wie diejenige in F_1 durch die angehängten Träger beeinflußt. Der rechts von F_3 liegende Teil der Einflußlinie ist ebenso gebildet wie bei F_1, und bei dem

links von F_3 liegenden Teil ist zu beachten, daß er sich über den angehängten Träger bis zu G_1 zu erstrecken hat. In Fig. 6c ist diese Einflußlinie dargestellt.

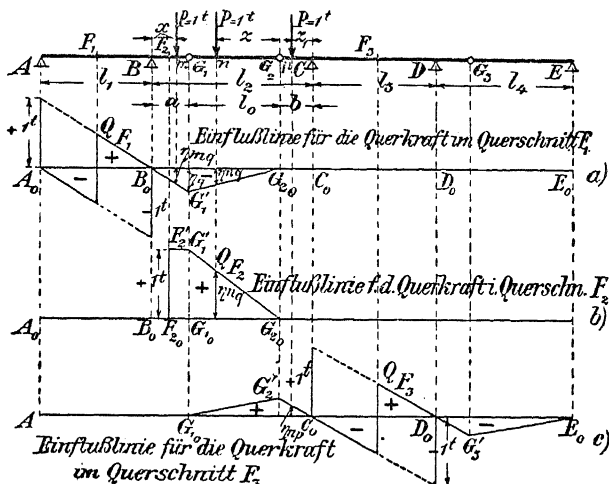


Fig. 6.

c) Einflußlinien der Momente. Querschnitt F_1 in der Öffnung AB (Fig. 7 a). Solange sich die Last $P = 1$ t zwischen den Stützen befindet, wirkt das Trägerstück AB als ein einfacher Träger und die Einflußlinie für das Moment in F_1 ist wie bei dem einfachen Träger zu zeichnen (vgl. I. Teil, § 27, 1 c, Fig. 94). Bewegt sich jedoch die Last $P = 1$ t über den Kragarm BG_1, so tritt in F_1 ein negatives Moment auf, das sich mit dem durch Formel (2) bestimmten Auflagerdruck zu

(5) $$M_{F_1} = A \cdot c_1 = -\frac{1 \cdot x}{l_1} \cdot c_1 = \eta_{m_0}$$

berechnet. Dieser Gleichung entspricht die Gerade $B_0G'_1$, die in die Verlängerung der Geraden $A'B_0$ fällt; denn aus Fig. 7a folgt, mit nach unten gerichteten negativen Ordinaten,

$$-\eta_{m_c} : x = c_1 : l_1 \quad \text{oder} \quad \eta_{m_c} = -\frac{x \cdot c_1}{l_1}, \text{ wie oben in (5).}$$

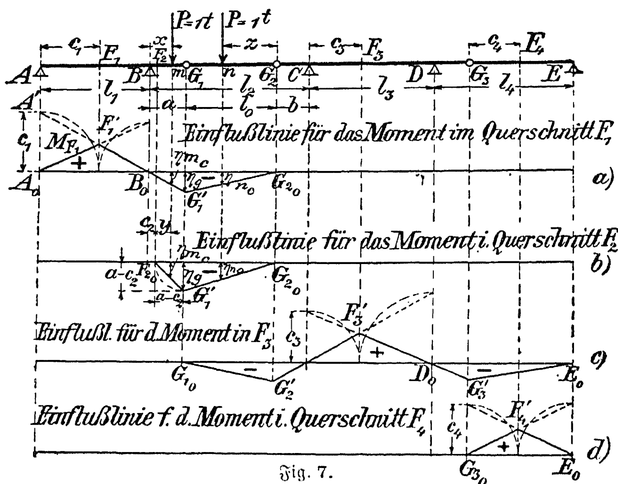


Fig. 7.

Wandert die Last über den eingehängten Träger G_1G_2, o ist nach Formel (3) der Auflagerdruck $A = -\frac{1 \cdot z \cdot a}{l_0 \cdot l_1}$ und damit wird das Moment in F_1

$$(6) \qquad M_{F_1} = A \cdot c_1 = -\frac{1 \cdot z \cdot a}{l_0 l_1} \cdot c_1 = \eta_{n_c}.$$

Durch diese Gleichung ist die Gerade $G'_1G_{2_0}$ festgelegt, denn aus Fig. 7a folgt $\eta_{n_c} = \frac{\eta_g \cdot z}{l_0}$; da aber $c_1 : l_1 = -\eta_g : a$

ist, so wird $\eta_g = -\frac{c_1 \cdot a}{l_1}$ und damit ergibt sich $\eta_{n_c} = -\frac{z \cdot a \cdot c_1}{l_0 \cdot l_1}$, wie oben in (6).

Rechts von G_2 übt die Last $P = 1$ t keinen Einfluß mehr auf M_{F_1} aus, mithin ist die Einflußlinie des Momentes in F_1 durch die gebrochene Linie $A_0F_1'G_1'G_{2_0}$ dargestellt.

Querschnitt F_2 im Kragarm BG_1 (Fig. 7 b). Jede links von F_2 stehende Last ist ohne Einfluß auf das Moment in F_2. Steht jedoch die Last $P = 1$ t im Abstand y rechts von F_2, so wird:

$$M_{F_2} = -1 \cdot y = \eta_{m_c}. \tag{7}$$

Durch diese Gleichung ist die Gerade $F_{2_0}G_1'$ bestimmt, die über dem Gelenk G_1 durch ihre größte Ordinate $\eta_g = a - c_2$ in einfacher Weise festzulegen ist. Tritt die Last $P = 1$ t auf den eingehängten Träger G_1G_2, so erzeugt sie den Gelenkdruck $G_1 = \frac{1 \cdot z}{l_0}$ bzw. in F_2 das Moment

$$M_{F_2} = -G_1(a - c_2) = -\frac{1 \cdot z}{l_0}(a - c_2) = \eta_{n_c}. \tag{8}$$

Diesem Ausdruck entspricht die Gerade $G_1'G_{2_0}$, denn aus Fig. 7b folgt $\eta_{n_c} = \frac{\eta_g \cdot z}{l_0}$, und mit $\eta_g = -1 \cdot (a - c_2)$ wird $\eta_{n_c} = -\frac{z}{l_0}(a - c_2)$, wie oben in (8). Mithin ist die gebrochene Linie $F_{2_0}G_1'G_{2_0}$ die Einflußlinie für das Moment in F_2.

Querschnitt F_3 in der Öffnung CD (Fig. 7 c). Die Einflußlinie für M_{F_3} ist in derselben Weise abzuleiten wie diejenige für M_{F_1}, es ist lediglich zu beachten, daß auf der linken Seite von F_3 der Kragarm CG_2 mit dem eingehängten Träger G_1G_2 vorhanden ist. In Fig. 7 c ist die Einflußlinie für M_{F_3} durch die gebrochene Linie $G_{1_0}G_2'F_3'G_3'E_0$ dargestellt.

Querschnitt F_4 im eingehängten Träger G_3E (Fig. 7 d). Der eingehängte Träger wirkt wie ein einfacher

beiderseits unterstützter Träger, mithin ist seine Einflußlinie für das Moment in F_4 ebenso wie bei dem einfachen Träger zu bestimmen (vgl. I. Teil, §27, 1c, Fig. 94). In Fig. 7d ist die Einflußlinie für M_{F_4} durch die gebrochene Linie $G_{3_0}F'_4E_0$ dargestellt.

2. Mittelbare Belastung durch eine Einzellast.

Hierbei werden ebenfalls Einflußlinien benutzt, die auch wie vorstehend unter 1 zu ermitteln sind. Dabei ist aber zu

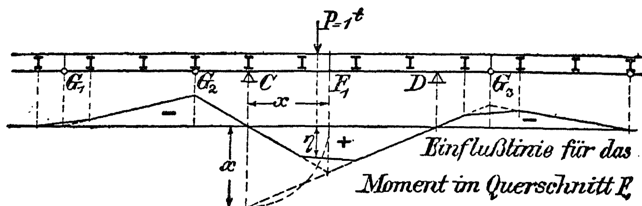


Fig. 8.

beachten, daß [nach Gleichung (50) im I. Teil, S. 99] zwischen zwei benachbarten Knotenpunkten jede Einflußlinie eine Gerade sein muß.

Für einen mittelbar belasteten Gerberträger ist in Fig. 8 die Einflußlinie für das Moment im Querschnitt F_1 dargestellt, wozu keine weitere Erläuterung nötig ist.

II. Abschnitt.

Die durchgehenden Fachwerk-Gelenkträger (Gerbersche Fachwerkträger).

§ 4. Allgemeine Anordnung.

Die Gestalt des Gerberschen Fachwerkträgers läßt sich den Ergebnissen der statischen Berechnung sehr gut anpassen, in-

'en ist eine große Materialersparnis möglich. Die An-
; der Gelenke und die Auflagerung ist beim Gerber-
:chwerkträger ebenso auszuführen wie beim vollwan-
erberträger. Die Zahl der Gelenke muß der Zahl der
ützen entsprechen, und außerdem sind die Gelenke so
ıgen, daß der Gerberträger nicht labil wird.
. ein Gerberscher Fachwerkträger auch innerlich statisch
:t sein, so muß jeder seiner Teile, Ausleger- wie Koppel-
der im I. Teil, S. 106 angegebenen Formel (59)

$$s = 2k - 3$$

: leisten.
Lasten sollen nur in den Knotenpunkten angreifen.

Der Gerbersche Fachwerkträger mit ruhender Belastung.

(uflagerdrücke (=widerstände). Diese müssen eben-
›ei dem vollwandigen Gerberträger (vgl. § 2, 1, S. 13)
fe der bekannten Kraft- und Seilecke ermittelt werden.
Innere Kräfte. Die Spannkräfte in den einzelnen
ı eines Gerberschen Fachwerkträgers sind in derselben
;u ermitteln wie bei einem einfachen Fachwerkträger.
›enutzt entweder das Culmannsche Verfahren oder
die Cremonaschen Kräftepläne (vgl. I. Teil, § 29,
, weil diese sofort für alle Stäbe die Spannkräfte liefern.
: Kräftepläne für die Ausleger- bzw. Koppelträger
t man am besten getrennt und beginnt damit, nach-
e Auflager- bzw. Gelenkdrücke bestimmt sind, am vor-
testen an den Gelenkpunkten. Beim Auftragen der
pläne ist zu beachten, daß nur für Knotenpunkte mit
ns 2 unbekannten Stabkräften ein geschlossenes ein-
bestimmtes Krafteck gezeichnet werden kann. Dies wird
mmer möglich sein, wenn das Fachwerk des Gerber-
s der Formel $s = 2k - 3$ genügt.

§ 6. Der Gerbersche Fachwerkträger mit beweglicher Belastung.

Auch bei dieser Trägerart wird der Einfluß beweglicher Belastung am einfachsten mittels Einflußlinien untersucht. Die Last P = 1 t soll hier am Untergurt angreifen.

a) Einflußlinien für die Auflagerwiderstände. Diese unterscheiden sich nicht von den entsprechenden Einflußlinien für einen vollwandigen Gerberträger; mithin können die im § 3, Fig. 5, S. 16 abgeleiteten Einflußlinien ohne Abänderung auch hier gebraucht werden.

b) Einflußlinien für die Stabkräfte. Bezüglich dieser Einflußlinien sind die Koppelträger bzw. die Auslegerträger gesondert zu betrachten. Die Koppelträger sind einfache, beiderseits unterstützte Fachwerkträger, daher sind die Einflußlinien für ihre Stabkräfte wie im I. Teil, § 31b zu ermitteln.

1. Einflußlinien für die Gurtstäbe des Auslegerträgers.

Für einen beliebigen Ober- bzw. Untergurtstab gilt nach Teil I, § 31 b ganz allgemein

$$O = -\frac{M_0}{h_0} \quad \text{bzw.} \quad U = +\frac{M_u}{h_u}.$$

Hierbei ist M_0 bzw. M_u das Moment um den Gegenpunkt eines Gurtstabes bei jeder beliebigen Stellung der Last P = 1t und h_0 bzw. h_u der senkrechte Abstand (Hebelarm) des betreffenden Gurtstabes von seinem Gegenpunkt. Gemäß diesen Formeln sind die Ordinaten der Einflußlinien für die Gurtstäbe proportional den Ordinaten der Einflußlinien für die Momente um die Gegenpunkte der Gurtstäbe, und $\frac{1}{h_0}$ bzw. $\frac{1}{h_u}$ sind die jeweils in Frage kommenden Verhältniszahlen (Multiplikatoren oder Veränderungsziffern).

flußlinie für eine Gurtspannkraft ist daher ebenso wie die Einflußlinie eines Momentes (Fig. 7, bei zu beachten ist, daß die Ordinaten der ersteren). $\frac{1}{h_u}$-fachen Wert der Ordinaten der letzteren beaß sie im Kräftemaßstab erscheinen.

en Gerberträger ABCD (Fig. 9) ist die Einfluß-Obergurtstabes O im mittleren Teil BC dargenge die Last P = 1 t zwischen den Stützen B und verhält sich der Auslegerträger wie ein einfacher ger BC. Die Einflußlinie für einen Obergurtstab im I. Teil, Fig. 106, S. 122 zu zeichnen, indem Lotrechten durch die Stütze B den Wert $\frac{x_0}{h_0}$ im ab als Strecke B_0B' an die Tragwerkslinie anträgt e des Gegenpunktes G_0 die Einflußlinie wie frü-(Fig. 9 a). Hier ist besonders zu beachten, daß G_0 steten Gurtung liegt. Der weitere Verlauf der für Laststellungen außerhalb BC entspricht 20.

n Untergurtstab U fällt hier der Gegenpunkt lastete Gurtung, mithin muß die zugehörige Ein-Länge von U entsprechend, durch eine Gerade den. (Vgl. I. Teil, Fig. 106.)

nien für die Wandglieder des Auslegerträgers.

onale D_1 bzw. D_2 zwischen den Stützen des ägers. Befindet sich die Last P = 1 t zwischen C und D des Auslegerträgers (Fig. 9), so verhält e ein einfacher Fachwerkträger auf zwei Stützen ußlinie einer zwischen C und D befindlichen Diach einem der im I. Teil, § 31 b, 3, angegebenen t zeichnen. Tritt jedoch die Last über die Stütze B

oder C heraus, so ist wie bei den Momenten die für die inneren Lastlagen gefundene Einflußlinie geradlinig bis zu den Gelenklotrechten zu verlängern und dann bis zu den benachbarten Gelenken bzw. Auflagern zu führen (Fig. 9 b und c).

Bei der Diagonale D_1 (Fig. 9 b) fällt der Gegenpunkt G_{d_1} aus der Mittelöffnung BC ziemlich weit heraus. Es ist

Fig. 9.

daher vorteilhaft, zum Auftragen der Einflußlinie für D_1 die Abschnitte α und β zu benutzen, die von den gleichzeitig mit D_1 geschnittenen, beiderseits verlängerten Gurtstäben auf den benachbarten Auflagerlotrechten abgeschnitten werden. Gemäß Formel (72), S. 127 im Teil I wird damit

$$B_0B' = -\frac{\alpha\, d}{y_1\, y_2} \quad \text{bzw.} \quad C_0C' = +\frac{\beta\, d}{y_1\, y_2}.$$

Durch diese Werte ist die Einflußlinie für D_1 festgelegt (Fig. 9 b), die in der angegebenen Weise über die Gelenke hinausläuft. Kann der Gegenpunkt G_{d_1} benutzt werden, so genügt schon der Wert B_0B' zum Auftragen der Einflußlinie für D_1.

Bei der Diagonale D_2 (Fig. 9 c) fällt der Gegenpunkt G_{d_2} in die Mittelöffnung BC hinein, infolgedessen ist es vorteilhafter den Hebelarm h_{d_2} zu benutzen, der mit dem Abstand x_{d_2} des Gegenpunktes G_{d_2}, gemäß Formel (71), Teil I, S. 126, den Wert

$$B_0B' = -\frac{x_{d_2}}{h_{d_2}}$$

liefert, der gemeinschaftlich mit G_{d_2} die Einflußlinie für D_2 (Fig. 9 c) festlegt.

β) Diagonale D_3 im Kragarm (Ausleger). Bewegt sich die Last $P = 1$ t zwischen dem Gegenpunkt G_{d_3} und dem Endknotenpunkt m des unter D_3 liegenden Stabes der belasteten Gurtung, so folgt für den Wert der Einflußordinate aus der Momentengleichung für G_{d_3}

$$(9) \qquad D = -1\frac{x_m}{h_{d_3}} = \eta_{m_d}.$$

Die größte Ordinate entsteht unter m; von hier aus nehmen die Ordinaten nach B hin bis auf Null ab und in gleicher Weise auch nach G_{d_3} hin, jedoch nur bis zum Gelenk G_1, denn dort tritt der Koppelträger in Wirksamkeit, so daß die Einflußlinie bis zu dessen Endpunkt A reichen muß. Zum Auftragen dieser Einflußlinie genügt der Wert $m_0m' = \eta_{m_d} = -\frac{x_m}{h_{d_3}}$; den weiteren Verlauf der Einflußlinie gibt Fig. 9 d an.

III. Abschnitt.

Der vollwandige Dreigelenkbogen.

§ 7. Der Dreigelenkbogen mit ruhender Belastung.

Der Einfluß ruhender, beliebig gerichteter wie auch lotrechter Lasten auf den Dreigelenkbogen ist bereits im I. Teil, § 34 gezeigt worden, wobei die Druck- oder Stützlinie Anwendung gefunden hat. Hier soll noch im besonderen angegeben werden, wie die infolge lotrechter Belastung in einem Dreigelenkbogen entstehenden Momente, Längs- (Normal-) und Querkräfte auf anderem Wege gefunden werden können.

Dazu sei bemerkt, daß es meistens vorteilhaft ist, zur Untersuchung eines Bogenquerschnittes nicht das zugehörige auf die Bogenschwerachse bezogene Moment zu benutzen, sondern die Kerngrenzenmomente. Bezüglich des Kernes vgl. I. Teil, Fig. 55, S. 57.

Greift im Punkt K auf der Symmetrielinie eines Bogenquerschnittes F (Fig. 10) die in der Bogenebene beliebig gerichtete Mittelkraft R an, so kann sie in eine Normalkraft N und eine Querkraft Q zerlegt werden. Die Normalkraft N erzeugt in bezug auf die Schwerlinie des Querschnittes das Moment $M = N \cdot f$, während die Querkraft Q Schubspannungen erzeugt, die in der Regel vernachlässigt werden.

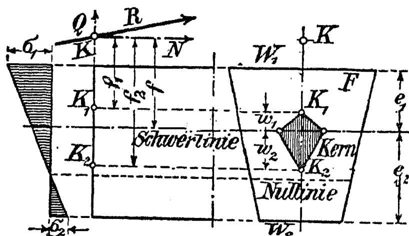


Fig. 10.

Durch N und M entstehen in einem Bogenquerschnitt F, gemäß Teil I, Formel (27), die Normalspannungen

$$\sigma = \frac{N}{F} \pm \frac{M\eta}{J},$$

wobei J das zu F gehörende Trägheitsmoment bedeutet. Für die äußersten Fasern des Querschnittes F ist $\eta = e_1$ bzw. $\eta = e_2$, und es wird

$$\sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{M\,e_1}{J},$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{F} - \frac{M\,e_2}{J}.$$

Setzt man $M = N \cdot f$ und beachtet, daß (Teil I, S. 57) $\frac{J}{e_1} = W_1$ und $\frac{J}{e_2} = W_2$ ist, so folgt

$$\sigma_1 = \frac{N}{F} + \frac{N \cdot f}{W_1} = N\left(\frac{1}{F} + \frac{f}{W_1}\right),$$

$$\sigma_2 = \frac{N}{F} - \frac{N \cdot f}{W_2} = N\left(\frac{1}{F} - \frac{f}{W_2}\right).$$

Nun kann aber nach Teil I, S. 58, Formel (29) bzw. (30) gesetzt werden

$$W_1 = w_2\,F \quad \text{bzw.} \quad W_2 = w_1\,F,$$

wobei w_2 und w_1 die Kernweiten des Bogenquerschnittes F bedeuten, und damit wird

$$\sigma_1 = N\left(\frac{1}{F} + \frac{f}{w_2\,F}\right) = \frac{N}{F} \cdot \frac{f + w_2}{w_2},$$

$$\sigma_2 = N\left(\frac{1}{F} - \frac{f}{w_1\,F}\right) = -\frac{N}{F} \cdot \frac{f - w_1}{w_1}.$$

Nach Fig. 10 ist aber $f + w_2 = f_2$ der Hebelarm der Normalkraft N in bezug auf den Kernpunkt K_2, folglich $N \cdot f_2 = M_2$ das Moment der Kraft N in bezug auf K_2, das als Kerngrenzenmoment bezeichnet wird. Ebenso ist $f - w_1 = f_1$ der Hebelarm von N in bezug auf den Kernpunkt K_1 und $N \cdot f_1 = M_1$ das zugehörige Kerngrenzenmoment. Mit diesen Momenten wird schließlich

$$(10) \quad \begin{cases} \sigma_1 = \dfrac{N \cdot f_2}{F \cdot w_2} = \dfrac{M_2}{W_1}, \\[2ex] \sigma_2 = -\dfrac{N \cdot f_1}{F \cdot w_1} = -\dfrac{M_1}{W_2}. \end{cases}$$

Hierbei ist σ_2 als eine negative Druckspannung anzusehen. Besonders sei noch einmal bemerkt, daß der für eine Spannung σ in Frage kommende Kernpunkt immer auf der zur untersuchten Faser abgewendeten Seite des Querschnittes liegt.

Denkt man sich die beiden Kämpfergelenke A und B eines Dreigelenkbogens AGB (Fig. 11) durch eine Zugstange verbunden und gleichzeitig das eine Kämpfergelenk in ein bewegliches Auflager verwandelt, so wirkt der Dreigelenkbogen gegenüber den äußeren Kräften als ein einfacher Träger AB. Für einen in den beliebigen Schnitt s — s des Trägers AB fallenden Kernpunkt K des Bogens kann das Moment in bekannter Weise mittels eines Kraft- und eines Seilecks bestimmt werden. Man setzt die lotrechten Kräfte $P_1, P_2 \ldots P_7$ zu einem Krafteck a b mit der beliebigen Polweite $\mathfrak{H}$ zusammen und zeichnet dazu das Seileck I II III . . . VIII, das mit seiner Schlußlinie A′B′ = s die Momentenfläche begrenzt. Aus dieser erhält man unter K die Ordinate $kk' = y'_k$ und damit ist das Moment in K bestimmt zu

(11) $$\mathfrak{M}_k = \mathfrak{H} \cdot y'_k .$$

Dieses Ergebnis ändert sich nicht, wenn das gedachte bewegliche Auflager wieder beseitigt und die Kraft in der zugehörigen Zugstange AB durch die entsprechend gerichteten Auflagerwiderstände H′ ersetzt wird. Die wagerechte Seitenkraft von H′ liefert den Horizontalschub des Dreigelenkbogens

(12) $$H = H' \cdot \cos\alpha .$$

Die Kraft H′ erzeugt im Kernpunkt K das Moment

(13) $$M'_k = H' \cdot y_k \cos\alpha = H \cdot y_k ,$$

wobei y_k den lotrecht gemessenen Abstand des Punktes K von der Verbindungsgeraden AB der Kämpfer bedeutet. Das wirkliche Moment in K wird nunmehr

(14) $$M_k = \mathfrak{M}_k - M'_k = \mathfrak{M}_k - H \cdot y_k .$$

Fällt der Gelenkpunkt G mit dem Punkt K zusammen, so muß $M_k = M_g = 0$ werden und aus (14) folgt mit den in Fig. 11 angegebenen Bezeichnungen

$$M_g = 0 = \mathfrak{M}_g - H \cdot f$$

oder

$$\text{(15)} \qquad H = \frac{\mathfrak{M}_g}{f}\,.$$

Aus (11) folgt aber für das Gelenk $\mathfrak{M}_g = \mathfrak{H} \cdot y'_g$, also

$$\text{(15 a)} \qquad H = \mathfrak{H}\,\frac{y'_g}{f}\,.$$

Dieser Wert kann in einfacher Weise zeichnerisch gefunden werden. Man trägt (Fig. 11) in der Verlängerung des Kräfte-

Fig. 11.

zuges a b die Strecken $\overline{op} = y'_g$ und $\overline{pq} = f$ auf und setzt senkrecht daran die Strecke $\overline{pr} = \mathfrak{H}$. Wird nun zur Verbindungsgeraden r q eine Parallele durch o gezogen, so schneidet sie auf der Verlängerung von r p die Strecke $\overline{ps}$ ab, die den in Gl. (15a) gegebenen Wert $H = \mathfrak{H} \cdot \frac{y'_g}{f}$ darstellt.

Der Beweis folgt ohne weiteres aus den ähnlichen Dreiecken o p s und q p r.

Sobald H festgelegt ist, können auch die Kämpferdrücke bestimmt werden. Vom Pol O′ aus zieht man eine Parallele s′ zur Schlußlinie AB = s, die den Kräftezug a b in t schneidet und die lotrechten Auflagerdrücke $\overline{at} = \mathfrak{A}$ und $\overline{tb} = \mathfrak{B}$ liefert. Wird ferner von t aus eine Parallele zu H′ (Richtung AB) gezogen und senkrecht zu $\overline{ab}$ der Wert H aufgetragen, indem man s nach O hinauf lotet, so erhält man $H' = \overline{tO}$, $K_a = \overline{Oa}$ und $K_b = \overline{bO}$.

Mit dem Pol O kann in bekannter Weise (Teil I, § 34) die Druck- oder Stützlinie gezeichnet werden, außerdem läßt sich damit für jeden beliebigen Bogenpunkt die Normalkraft N bzw. die Querkraft Q finden. Für den Bogenpunkt C ergibt sich die Normalkraft N_c und die Querkraft Q_c, indem man im Krafteck vom Punkt e, der zwischen den zu C benachbarten Kräften liegt, eine Parallele zu der durch C gehenden Tangente t — t zieht und in O eine Senkrechte dazu errichtet. In Fig. 11 geht diese Parallele durch O hindurch, mithin ist $Oe = N_c$ und $Q_c = 0$.

Wird der Wert aus Gl. (15 a) bzw. aus (11) in Gl. (14) eingesetzt, so folgt

$$M_k = \mathfrak{H}\, y'_k - \mathfrak{H}\frac{y'_g}{f}\, y_k = \mathfrak{H}\left(y'_k - y_k\frac{y'_g}{f}\right). \tag{16}$$

Der Klammerwert dieser Gleichung läßt sich in einfacher Weise zeichnerisch darstellen. Wenn man auf der Geraden AB (Fig. 11) im Fußpunkt von f den Wert y'_g als Strecke g m aufträgt, die Gerade G m zieht und die Ordinate y_k auf f projiziert, so schneidet die durch den Endpunkt von y_k zu G m gezogene Parallele auf AB die Strecke g n ab, und es folgt aus den ähnlichen Dreiecken $\overline{gn} = y_k \cdot \frac{y'_g}{f}$. Trägt man im Seileck auf der Ordinate $y'_k = kk'$ den Wert g n als Strecke k k″ auf, so stellt die Differenz $k'k'' = -\eta$ den Klammer-

wert der Gl. (16) dar, und es gilt

(16 a) $$M_k = -H \cdot \eta.$$

Liegt η unter dem Seileck, so wird dieses Moment negativ, und liegt es darüber, so wird das Moment positiv.

Die Ordinate η kann auch in anderer Weise gefunde[n] werden. Die Geraden AK und BG (Fig. 11) schneiden sich i[n] D und ein durch D gefälltes Lot schneidet die Gerade B'G in D'. Die Verbindungslinie A'D' schneidet die Verlängerun[g] von y'_k in k'' und es gilt $kk'' : y'_g = y_k : f$ oder $kk'' = y'_g \frac{y_k}{f}$. Die Differenz $k'k'' = y'_k - y'_g \frac{y_k}{f} = -\eta$ ist wieder de[r] bereits oben ermittelte Wert.

§ 8. Der Dreigelenkbogen mit beweglicher Belastung.

Die Einwirkung einer beweglichen Belastung auf de[n] Dreigelenkbogen wird am einfachsten und übersichtlichste[n] mittels Einflußlinien untersucht.

1. Einflußlinien für die Stützenwiderstände.

a) Horizontalschub H. Setzt man zur Vereinfachun[g] der Ableitung zwei wandernde Einzellasten $P = 1$ t in m un[d] n auf den Bogenträger AGB (Fig. 12), von denen die ei[ne] den Abstand a von A und die andere den Abstand b von [B] besitzt, so liefert die Bedingung, daß die Momentensumm[e] für die Gelenkpunkte gleich Null sein muß, folgende Gle[i]chungen: Für das Scheitelgelenk G

$$Ag - Hf' - 1(g - a) = 0$$

für das Gelenk B

$$Al - Hd - 1(l - a) - 1 \cdot b = 0,$$

wobei die Bedeutung der einzelnen Buchstaben aus Fig. [12] zu entnehmen ist. Aus den beiden Gleichungen folgt schlie[ßlich]

ich für den Horizontalschub

$$H = \frac{1 \cdot a(l-g) + 1 \cdot b \cdot g}{f'l - gd}.$$

Nun ist aber $d = l \cdot tg\alpha$, somit

$$f'l - gd = f'l - g l tg\alpha = l(f' - g tg\alpha) = l \cdot f,$$

wenn f den lotrecht gemessenen Abstand zwischen dem Gelenk G und der Kämpferverbindungsgeraden AB bedeutet. Es wird also

(17) $$H = \frac{1 \cdot a(l-g) + 1 \cdot b \cdot g}{l \cdot f}.$$

Da aber

(18) $$\frac{1 \cdot a(l-g) + 1 \cdot b \cdot g}{l} = \mathfrak{M}_g$$

das Moment für die dem Scheitelgelenk G entsprechende Stelle eines einfachen Trägers AB mit der Länge l bedeutet, der durch die beiden Lasten P = 1 t beansprucht wird, so folgt wie auf S. 31

(19) $$H = \frac{\mathfrak{M}_g}{f}.$$

Die Einflußlinie für den Horizontalschub H eines Dreigelenkbogens wird also gefunden, indem man die Ordinaten der Einflußlinie für das Moment an der Stelle G eines einfachen Trägers AB durch die lotrecht gemessene Höhe f des Gelenkes G über der Kämpferverbindungslinie AB (Pfeilhöhe) dividiert.

Die Einflußlinie für $\mathfrak{M}_g$ ist bereits im I. Teil, § 27, Fig. 94 S. 103 ermittelt worden; dividiert man ihre Ordinaten durch f, so geht sie in die Einflußlinie für H über. Um letztere zu zeichnen, trägt man (Fig. 12 a) von der Tragwerkslinie A_0B_0 die Strecken $A_0A' = \frac{g}{f}$ bzw. $B_0B' = \frac{l-g}{f}$ lotrecht auf und

verbindet deren Endpunkte mit B_0 bzw. A_0. Die gleichen Strecken ergeben sich aus Gl. (17), wenn gleichzeitig $a = 0$ und $b = l$ bzw. $a = l$ und $b = 0$ gesetzt werden. Die größte Ordinate der Einflußlinie für H entsteht unter dem Gelenk, sie wird

(20) $$\eta_{g_h} = \frac{g(l-g)}{l \cdot f} = \overline{G_0 G'}.$$

Für den symmetrischen Bogen wird mit $g = \frac{l}{2}$

(20 a) $$\eta_{g_h} = \frac{l}{4f}.$$

Die Ordinaten von H sind im Kräftemaßstab zu messen.

Zum Auftragen der Einflußlinie für H genügt der Wert $g : f$, der auf einfache Weise zeichnerisch gefunden werden kann. In Fig. 12a ist $A_0G_0 = g$; macht man $A_0E = f$ und $AD = 1\,t$, zieht die Verbindungsgerade EG_0 und parallel dazu DK, dann ist $\overline{A_0K} = g : f$, denn aus den ähnlichen Dreiecken folgt $f : g = 1 : \overline{A_0K}$ oder $\overline{A_0K} = g : f$. Dieser Wert ist mit dem Zirkel um A_0 zu drehen.

b) Auflagerdruck A. Aus der Gleichung

$$Al - Hd - 1(l-a) - 1 \cdot b = 0$$

folgt mit $d = l \cdot \operatorname{tg}\alpha$

(21) $$A = H \cdot \operatorname{tg}\alpha + \frac{1(l-a) + 1 \cdot b}{l}.$$

Nun stellt aber das zweite Glied dieses Ausdrucks den Auflagerdruck $\mathfrak{A}$ eines einfachen Trägers AB dar, der mit zwei Einzellasten $P = 1\,t$ belastet ist, und es folgt

(22) $$A = \mathfrak{A} + H \cdot \operatorname{tg}\alpha.$$

Diese Gleichung zeigt, daß die Ordinaten der Einflußlinie für den Auflagerdruck A eines Dreigelenkbogens AGB zusammenzusetzen sind aus den Ordinaten für die Einflußlinie des Auflagerdruckes eines einfachen Trägers AB (vgl. I. Teil, § 27, Fig. 90, S. 100) und den mit $\operatorname{tg}\alpha$ multiplizierten Ordinaten

der Einflußlinie für den Horizontalschub H. In Fig. 12 b ist die Konstruktion durchgeführt, wobei der Wert $\frac{g}{f} \operatorname{tg} \alpha$ in einfacher Weise zeichnerisch ermittelt ist.

Liegen die Kämpfer A und B gleich hoch, so wird $\operatorname{tg} \alpha = 0$, und die Einflußlinie für den Auflagerdruck A des Dreigelenkbogens AGB geht in diejenige für den Auflagerdruck 𝔄 eines einfachen Trägers AB über.

c) Kämpferdruck K_a. Verbindet man die Ordinaten der Einflußlinien für H und A nach dem pythagoreischen Lehrsatz (vgl. Fig. 11, S. 31), so erhält man in

(23) $$\eta_k = \sqrt{\eta_H^2 + \eta_A^2}$$

die Ordinaten der Einflußlinien für den Kämpferdruck K_a.

2. Einflußlinien für die Momente.

a) Moment für Punkt C der Bogenachse. Befindet sich (Fig. 12) die Last $P = 1$ t rechts von C an der Stelle m, so wird das Moment in bezug auf C

$$M_c = A \cdot x_c - H \cdot y'_c = (\mathfrak{A} + H \operatorname{tg} \alpha) x_c - H y'_c$$

(24) $$M_c = \mathfrak{A} x_c - H (y'_c - x_c \operatorname{tg} \alpha)$$

Es ist aber $y'_c - x_c \operatorname{tg} \alpha = y_c$ und $\mathfrak{A} \cdot x_c = \mathfrak{M}_c$, also

(25) $$M_c = \mathfrak{M}_c - H \cdot y_c,$$

wobei y_c den lotrecht gemessenen Abstand zwischen C und der Kämpferverbindungslinie AB darstellt. Um also die Einflußfläche für das Moment in einem beliebigen Bogenpunkt C zu erhalten, braucht man nur von der Einflußfläche für das Moment $\mathfrak{M}_c$ eines einfachen Trägers AB die mit y_c multiplizierte Fläche für den Horizontalschub H abzuziehen. Wenn hierbei die Ordinaten von $\mathfrak{M}_c$ überwiegen, wird die Einflußfläche positiv, sonst negativ. Setzt man für $\mathfrak{M}_c$ und H die der Last $P = 1$ t an der Stelle m entsprechenden Werte ein,

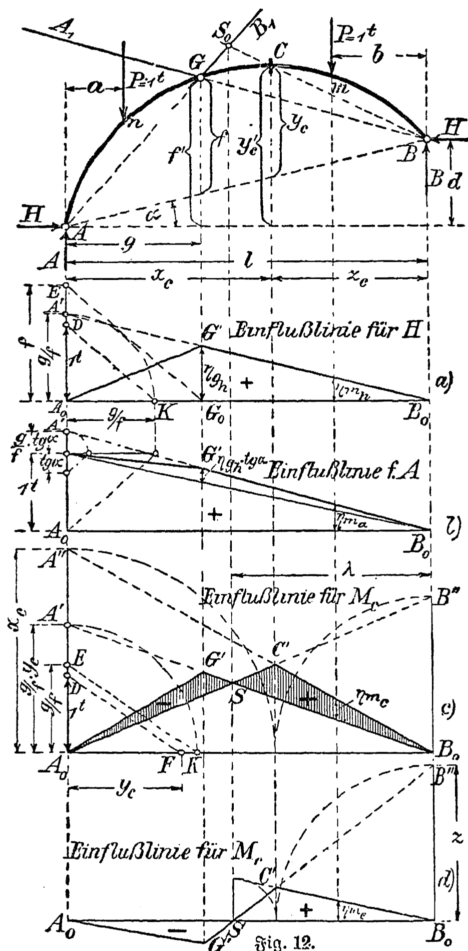

Einflußlinie für H
a)
Einflußlinie f. A
b)
Einflußlinie für M_c
c)
Einflußlinie für M_r
d)

Fig. 12.

so wird

$$(26) \qquad M_c = \frac{1 \cdot b \cdot x_c}{l} - 1 \cdot \frac{b \cdot g}{l \cdot f} \cdot y_c = \eta_{m_c}.$$

Dieser Gleichung entsprechen zwei Gerade. Wird $b = 0$, so folgt $\eta_{l_c} = 0$, und für $b = l$ wird $\eta_{0_c} = x_c - \frac{g}{f} \cdot y_c$ Trägt man in A_0 (Fig. 12 c) den Wert η_{0_c} senkrecht zur Tragwerkslinie A_0B_0 auf, so sind die beiden Geraden $A'B_0$ und $A''B_0$ bestimmt, die die Einflußlinie für M_c festlegen; dabei ist nur zu beachten, daß die M_c-Fläche ihre größte Ordinate unter dem Punkt C und die H-Fläche unter dem Gelenk G hat. Die Differenz der M_c- und der $H \cdot y_c$-Fläche ergibt die in Fig. 12 c schraffierte Momentenfläche mit der Belastungsscheide S (Momentennullpunkt).

Die Einflußlinie für M_c läßt sich sehr einfach auftragen, sobald der Wert $\frac{g}{f} \cdot y_c$ bestimmt ist, der zeichnerisch sofort gefunden werden kann. Man macht (Fig. 12 c) $A_0E = g : f$ (aus der H-Fläche, Fig. 12 a, zu entnehmen), $A_0F = y_c$ und $A_0D = 1$ t, zieht die Verbindungsgerade DF und parallel dazu EK, es ist dann nach den ähnlichen Dreiecken $1 : y_c = \frac{g}{f} : \overline{A_0K}$ oder $\overline{A_0K} = \frac{g}{f} \cdot y_c$

Die Ordinaten der M_c-Fläche sind im Längenmaßstab zu messen.

Aus Fig. 12 c ist zu erkennen, daß die Einflußlinie für das Moment im Punkt C sofort als Einflußlinie für das Moment M_c eines einfachen Trägers von der Länge λ bzw. $(l - \lambda)$ gefunden werden kann, wenn λ die Entfernung der Belastungsscheide S vom Auflager B angibt. Es ist also nur nötig, den Punkt S von vornherein festzulegen, was mit Hilfe der Kämpferdruck(schnitt)linie geschieht.

b) Die Kämpferdrucklinie. Eine über den Dreigelenkbogen AGB (Fig. 13) wandernde Last $P = 1$ t läßt sich an

jeder Stelle in zwei Kämpferdrücke K_a und K_b zerlegen, von denen der eine immer durch die beiden Gelenke des unbelasteten Bogenschenkels gehen muß, weil dieser nur in der Richtung der Verbindungsgeraden seiner beiden Gelenke einen Gegendruck leisten kann. Der Schnittpunkt S von P, K_a und K_b bewegt sich bei wanderndem P auf einer gebrochenen Linie, der Kämpferdrucklinie A_1GB_1, die durch die verlängerten Gelenkverbindungsgeraden BG und AG gebildet wird.

Geht der Kämpferdruck auf der belasteten Seite durch den Schwerpunkt eines bestimmten Querschnittes C, dann kann er in C nur einen Normaldruck und eine Querkraft, aber kein Moment erzeugen. Die entsprechende Stellung der Last P = 1 t ist durch den Punkt S_0 der Kämpferdrucklinie festgelegt. Befindet sich die Last P = 1 t rechts oder links von S_0, so

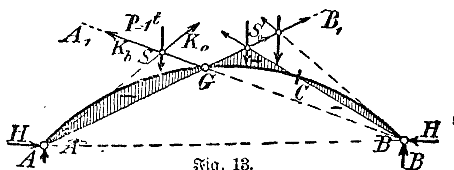


Fig. 13.

erzeugt sie im Querschnitt C ein positives oder ein negatives Moment; der Punkt S_0 ist somit die Belastungsscheide, die dem Moment $M_c = 0$ entspricht. Hiermit ist ein Verfahren gefunden, um den Nullpunkt (Belastungsscheide) S der Einflußlinie für M_c sofort festzulegen.

In Fig. 12 d ist die Einflußlinie für M_c mit Benutzung der Strecke λ und der Belastungsscheide S_0 dargestellt.

c) Moment für den Kernpunkt K eines Querschnittes. Wie bereits im § 7, S. 29 gezeigt wurde, ist es vielfach vorteilhaft, die Momente für die Kernpunkte zu ermitteln. In Fig. 14 a ist die Einflußlinie für das Moment in bezug auf den Kernpunkt K_1 des Querschnittes s — s dargestellt. Zunächst wird durch die Geraden BK_1 und AG die Belastungsscheide S_k bestimmt und sodann das bereits in Fig. 12 d

gezeigte Verfahren angewendet, wobei die Strecke λ zu benutzen ist.

3. Einflußlinien für die Querkräfte Q und die Normalkräfte N.

Legt man im Querschnitt D eine Tangente t — t an den Dreigelenkbogen AGB (Fig. 14), die mit der Wagerechten den Winkel φ bilden möge, so gilt für jede beliebige Belastung des Dreigelenkbogens nach der im Punkt D vorgenommenen Kräftezerlegung für die Querkraft

$$Q = V \cdot \cos\varphi - H \cdot \sin\varphi \tag{27}$$

und für die Normalkraft

$$N = V \cdot \sin\varphi + H \cdot \cos\varphi, \tag{28}$$

wobei V die lotrechte Seitenkraft aller links von D befindlichen Kräfte bedeutet.

a) Querkraft Q_D. Nach Gl. (27) ist die Einflußfläche für Q_D als Differenz der Flächen für $V \cdot \cos\varphi$ und $H \cdot \sin\varphi$ zu bilden. Befindet sich rechts von D an beliebiger Stelle m die Last P = 1 t, so wird V = A, wobei A den lotrechten Auflagerdruck des Bogens AGB bedeutet. Nach Gl. (22) ist aber $A = \mathfrak{A} + H \cdot \operatorname{tg}\alpha$, folglich wird nach Gl. (27)

$$Q_D = (\mathfrak{A} + H \cdot \operatorname{tg}\alpha)\cos\varphi - H \cdot \sin\varphi$$
$$= \mathfrak{A}\cos\varphi - H(\sin\varphi - \operatorname{tg}\alpha\cos\varphi)$$

$$Q_D = \mathfrak{A}\cos\varphi - H\frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha}. \tag{29}$$

Mit den besonderen Werten für P = 1 t folgt hieraus

$$Q_D = \frac{1 \cdot b}{l} \cdot \cos\varphi - 1 \cdot \frac{b \cdot g}{l \cdot f} \cdot \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha} = \eta_{m_q}. \tag{30}$$

Durch diese Gleichung werden zwei Gerade festgelegt. Für b = 0 wird $\eta_{1_q} = 0$ und für b = l ergibt sich

$$\eta_{0_q} = 1 \quad \cos\varphi - 1 \cdot \frac{g}{f} \cdot \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha}.$$

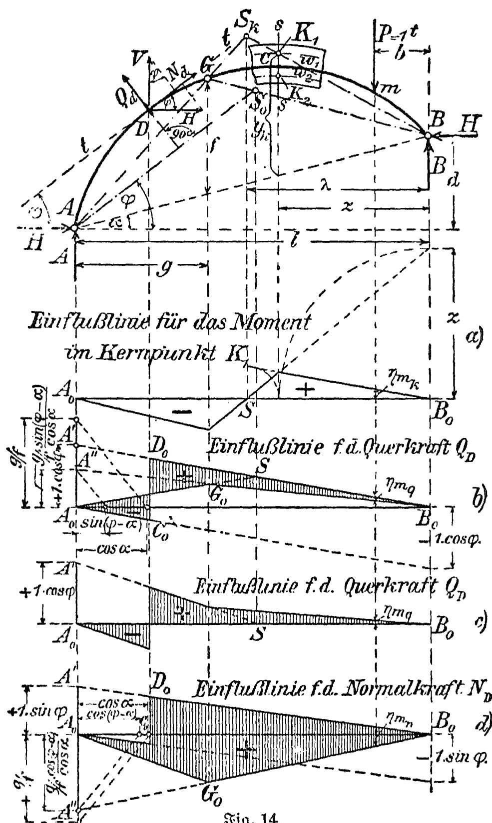


Fig. 14.

Trägt man diesen Wert senkrecht zur Tragwerkslinie A_0B_0 (Fig. 14 b) als Strecke $A'A''$ auf, so ist die Einflußlinie für Q_D festgelegt. Das erste Glied in Gl. (30) stellt die mit $\cos\varphi$

reduzierte Einflußfläche für die Querkraft eines einfachen Trägers AB dar und das zweite Glied die mit $\frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha}$ multiplizierte Einflußfläche des Horizontalschubes H. Die Differenz dieser beiden Flächen (in Fig. 14 b schraffiert) gibt die Einflußfläche für Q_D, die von dem gebrochenen Linienzug $A_0C_0D_0B_0G_0$ begrenzt wird.

Die Multiplikation $\frac{g}{f} \cdot \frac{\sin(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha}$ kann, wie Fig. 14b zeigt, in bekannter Weise zeichnerisch ausgeführt werden.

Durch Benutzung der Kämpferdrucklinie kann die Konstruktion der Einflußlinie für Q_D wesentlich vereinfacht werden. Errichtet man im Punkt D eine Senkrechte auf der Tangente t—t und fällt auf diese von A aus ein Lot, so hat dies die Richtung des Kämpferdrucks, der in D die Querkraft $Q = 0$ erzeugen würde. Da aber dieses Lot nicht mehr die eigentliche Kämpferdrucklinie, sondern nur noch ihre rückwärtige Verlängerung im Punkt S_0 trifft, so kann S_0 kein Einflußnullpunkt mehr sein, aber er behält die geometrische Bedeutung eines solchen und liefert (Fig. 14 b) auf der Verlängerung von A_0G_0 den Punkt S, der das Auftragen der Einflußlinie für Q_D wesentlich erleichtert, wie Fig. 14 c zeigt.

b) Normalkraft N_D. Die Einflußfläche für N_D ist gemäß Gl. (28) als Summe der Einflußflächen für $V \cdot \sin\varphi$ und $H \cdot \cos\varphi$ zu bilden. In derselben Weise wie für die Querkraft erhält man mit $V = A = \mathfrak{A} + H \cdot \operatorname{tg}\alpha$

$$(31) \qquad N_D = \mathfrak{A} \sin\varphi + H \frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha}.$$

Und mit den besonderen Werten für das rechts von D stehende $P = 1$ t folgt hieraus

$$(32) \quad N_D = \frac{1 \cdot b}{l} \cdot \sin\varphi + 1 \cdot \frac{b \cdot g}{l \cdot f} \cdot \frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha} = \eta_{m_n}.$$

Durch diese Gleichung werden zwei Gerade festgelegt. Für $b = 0$ wird $\eta_{1_n} = 0$ und für $b = l$ ergibt sich $\eta_{0_n} = 1 \cdot \sin\varphi + \frac{g}{f} \cdot \frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha}$. Trägt man in Fig. 14d senkrecht zur Tragwerkslinie A_0B_0 die Werte $A_0A' = 1 \cdot \sin\varphi$ und $A_0A'' = \frac{g}{f} \cdot \frac{\cos(\varphi - \alpha)}{\cos\alpha}$ auf, so bestimmen die damit festgelegten Geraden $A'B_0$ bzw. $A''B_0$ die schraffierte Einflußfläche für N_D, die in ähnlicher Weise wie unter a als Summe dargestellt ist und von dem gebrochenen Linienzug $A_0C_0D_0B_0G_0$ begrenzt wird.

Die auf der Gelenklotrechten anzutragenden Werte sind wieder zeichnerisch in Fig. 14 d ermittelt.

Erfährt ein Dreigelenkbogen mittelbare Belastung, so müssen die Einflußlinien (ähnlich wie in Fig. 8, S. 22) zwischen je zwei benachbarten Knotenpunkten durch gerade Linien dargestellt werden (vgl. I. Teil, Gl. 50, S. 99)

IV. Abschnitt.

Der Fachwerkbogen mit drei Gelenken.

§ 9. Allgemeine Anordnung.

Der Fachwerkbogen mit drei Gelenken ist in derselben Weise anzuordnen und aufzulagern wie ein entsprechender Vollwandbogen. Soll der Fachwerkgelenkbogen innerlich statisch bestimmt sein, dann ist jeder seiner beiden Schenkel aus einfachem Dreiecksfachwerk zu bilden, das der im I. Teil, S. 106 gegebenen Formel (59)

$$s = 2k - 3$$

Genüge leistet.

Die Lasten läßt man nur in den Knotenpunkten angreifen.

§ 10. Der Dreigelenkfachwerkbogen mit ruhender Belastung.

a) Auflagerkräfte (-widerstände). Die Kämpferdrücke und der Horizontalschub sind wie bei dem vollwandigen Dreigelenkbogen unter Verwendung von Kraft- und Seileck zu ermitteln (vgl. I. Teil, § 34 a bzw. II. Teil, § 7).

b) Innere Kräfte. Für jeden Bogenschenkel können nach Festlegung der Auflagerkräfte die Spannkräfte in den einzelnen Stäben bestimmt werden, wobei verschiedene Verfahren zur Anwendung kommen können.

Soll nur in einem Stab die Spannkraft ermittelt werden, dann ist das Verfahren von Culmann (vgl. I. Teil, § 29 b) besonders geeignet. Sind jedoch alle Stabkräfte zu bestimmen, so kann nach bekannten Regeln ein Cremonascher Kräfteplan (vgl. I. Teil, § 29 b) gezeichnet werden, der bei symmetrischer Gestaltung des Dreigelenkfachwerkbogens und symmetrischer Belastung nur für einen Bogenschenkel erforderlich ist.

Für einen als Dreigelenkbogen ausgebildeten symmetrischen Dachbinder (Fig. 15), der eine gleichmäßig verteilte, lotrechte Belastung (Eigengewicht und Schnee) zu tragen hat, ist ein Kräfteplan nach Cremona zu zeichnen.

In Anlehnung an das im I. Teil, § 34 gegebene Verfahren sind zunächst die Auflagerwiderstände zu ermitteln. Die auf der linken Binderhälfte befindlichen Lasten $P_1 \ldots P_4 = \Sigma P'$ sind zu einem Kräftezug a b aneinandergesetzt, der die Kämpferdrücke K_a' und K_b' liefert. Aus demselben Kräftezug a b ergeben sich auch für die auf der rechten Binderhälfte befindlichen Lasten $P_5 \ldots P_8 = \Sigma P''$, weil $\Sigma P' = \Sigma P''$ ist, die Kämpferdrücke K_a'' und K_b''. Aus K_a' und K_a'' folgt als Mittelkraft der Kämpferdruck K_a, der mit $\Sigma P'$ zusammengesetzt den Horizontalschub H liefert.

Nunmehr kann mit K_a der Kräfteplan der Stabkräfte in bekannter Weise gezeichnet werden, wobei aber zu beachten ist, daß der

Kräfteplan am Mittelgelenk durch den Horizontalschub H geschlossen sein muß

Bei schräg gerichteten Lasten (Wind) sowie einseitiger Belastung sind die Kämpferdrücke auch wie vorstehend zu ermit-

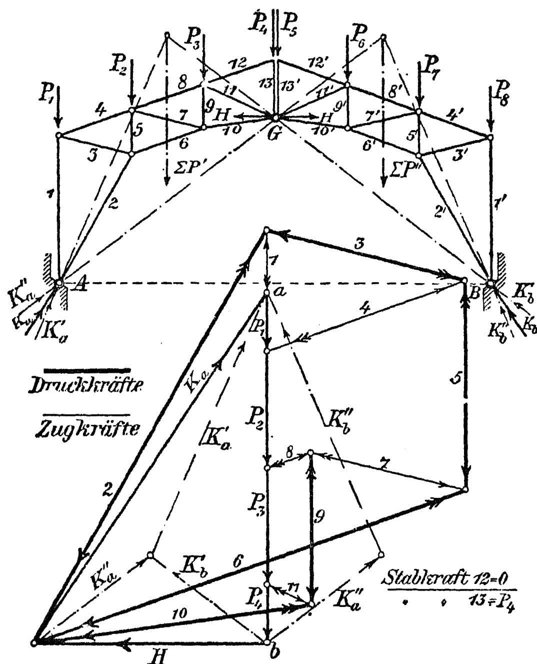


Fig. 15.

teln, jedoch muß für jede Binderhälfte ein besonderer Kräfteplan gezeichnet werden.

Sehr einfach ist auch die Ermittelung der Stabkräfte nach dem Verfahren von **Ritter** unter Zuhilfenahme der **Druck-**

linie; die Anwendung ist in Fig. 16 an einem beliebig belasteten Dreigelenkbogen gezeigt. Zunächst ist mit Hilfe des Kraftecks a b (Fig. 16 a) die Drucklinie als ein durch die 3 Gelenke gehendes Seileck I II...VIII gezeichnet (vgl. I. Teil, Fig. 115, S. 135). Legt man nun den Schnitt s—s durch den Bogen, so trifft er die 3 Stäbe O_3, D_4 und U_3 sowie die Seite III der Drucklinie. Die in der Seite III wirkende Druckkraft S_{III} ist nach Größe und Sinn aus dem Krafteck (Fig. 16a) zu entnehmen. Für den Gegenpunkt G_{O_3} des Stabes O_3 folgt schließlich, mit Benutzung der in Fig. 16 angegebenen Hebelarme,

$$O_3 h_{O_3} + S_{III} \cdot y = 0$$

oder

$$O_3 = -\frac{S_{III} \cdot y}{h_{O_3}}. \tag{33}$$

Dieser Ausdruck kann im Krafteck durch Zeichnen ähnlicher Dreiecke leicht bestimmt werden.

Noch einfacher ergibt sich die Spannung O_3, wenn man den Hebelarm h_{O_3} um G_{O_3} dreht, bis er die Seite III der Drucklinie bzw. ihre Verlängerung im Punkt 3 trifft, und im Punkt 3 die in III wirkende Kraft S_{III} in die beiden Seitenkräfte S'_{III} und S''_{III} zerlegt, derart, daß S''_{III} in die Richtung $3\,G_{O_3}$ fällt und S'_{III} senkrecht darauf steht. Mit diesen Kräften folgt für G_{O_3}

$$O_3 h_{O_3} + S'_{III} \cdot h_{O_3} + S''_{III} \cdot 0 = 0$$

$$O_3 = -S'_{III}. \tag{34}$$

Die Seitenkräfte S'_{III} und S''_{III} erhält man sofort aus dem Krafteck (Fig. 16 a) durch Zeichnen entsprechender Parallellinien.

In gleicher Weise ist für jeden anderen Gurtstab die Spannkraft zu ermitteln; in Fig. 16 ist dieses Verfahren auch auf O_4 angewendet. Es bleibt somit nur noch übrig, die Spann-

kräfte der Wandstäbe zu ermitteln, was durch Zeichnen einfacher Kräftepläne erfolgt. In dem durch P_3 belasteten Knotenpunkt greifen die beiden bekannten Gurtstabkräfte O_3 und O_4 sowie die beiden unbekannten Wandstabkräfte D_4 und D_5 an. Da die Richtungen der letzteren

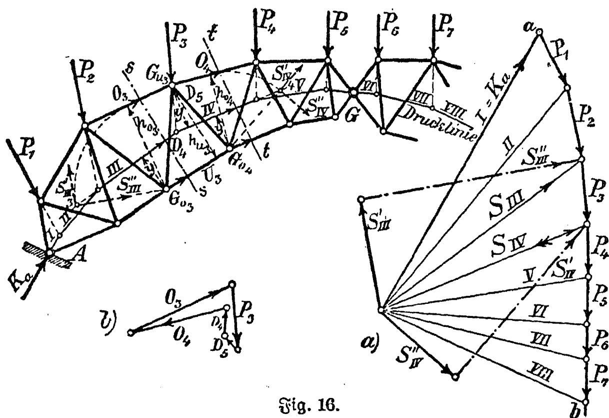


Fig. 16.

gegeben sind, so ergibt sich ihre Größe nebst Sinn aus einem einfachen Kräfteplan (Fig. 16 b). Zeichnet man für alle Knotenpunkte des Obergurtes derartige Kräftepläne, was mit Hilfe eines Strahlenbüschels von einem einzigen Punkt aus geschehen kann, so sind sämtliche Spannkräfte der Wandstäbe gefunden. Es ist vorteilhaft, zur Prüfung auch für einen Knoten des Untergurtes ein Krafteck zu zeichnen.

§ 11. Der Dreigelenkfachwerkbogen mit beweglicher Belastung.

Die Einwirkung beweglicher Belastung wird auch hier am einfachsten mittels Einflußlinien untersucht.

a) Einflußlinien für die Auflagerwiderstände.

Diese werden in derselben Weise ermittelt wie beim vollwandigen Dreigelenkbogen (vgl. § 8, 1, S. 33).

b) Einflußlinien für die Stabkräfte.

Zur Ermittelung dieser Einflußlinien ist das gleiche Verfahren wie bei dem einfachen Fachwerkträger zu benutzen (vgl. I. Teil, § 31 b). Es wird für jeden Stab das um den zugehörigen Gegenpunkt wirkende Moment ermittelt und durch den senkrechten Abstand zwischen Stab und Gegenpunkt dividiert. Der Einfachheit halber wird hier der gewöhnlich vorliegende Fall eines symmetrischen Bogens mit gleich hohen Kämpfern in Betracht gezogen. Handelt es sich um ungleich hohe Kämpfer A und B, dann bleibt das Verfahren dasselbe, es sind nur die lotrechten Abstände jeweils von der Kämpferverbindungslinie AB aus zu messen (vgl. § 8, Fig. 12, S. 37).

1. Einflußlinie eines Obergurtstabes O.

Für jede rechts vom zugehörigen Gegenpunkt G_0 befindliche Belastung gilt nach Fig. 17 für das Gegenpunktsmoment

$$A \cdot x_0 - H \cdot y_0 + O \cdot h_0 = 0$$

oder

$$(35) \qquad O = -\left[\frac{A\,x_0 - H\,y_0}{h_0}\right] = -\left[A\frac{x_0}{h_0} - H\frac{y_0}{h_0}\right].$$

Insbesondere wird für die an der Stelle m wirkende Last $P = 1\,t$, wenn $H = \frac{1 \cdot b \cdot g}{l \cdot f}$ gemäß Gl. (17), S. 34 gesetzt wird,

$$(36) \qquad O = -\left[\frac{1 \cdot b \cdot x_0}{l \cdot h_0} - \frac{1 \cdot b \cdot g}{l \cdot f} \cdot \frac{y_0}{h_0}\right] = \eta_{m_0}.$$

Hiernach sind die Ordinaten der Einflußlinie für O aus einer Differenz zu bilden. Das erste Klammerglied stellt die Ordinaten der Einflußlinie für einen Obergurtstab eines einfachen Trägers AB dar (vgl. I. Teil, § 34 b, 1, S. 122), die

kannter Weise gebildet werden, indem man (Fig. 17a) nde der Tragwerkslinie A_0B_0 den Wert $A_0A' = -\frac{x_0}{h_0}$ ägt; die größte Ordinate liegt unter G_0. Das zweite ımerglied stellt die mit $\frac{y_0}{h_0}$ multiplizierten Ordinaten der ußlinie des Horizontalschubes H dar, die am einfachsten :tragen werden, indem man die unter dem Mittelgelenk ıde größte Einflußordinate für H mit $\frac{y_0}{h_0}$ multipliziert. Gl. (20), S. 35 folgt für die größte Ordinate der H-Fläche $\mathfrak{z} = 1 - g = \frac{1}{2}$ und durch Multiplikation mit $\frac{y_0}{h_0}$

$$\eta_{g_h} = \frac{1}{4f} \cdot \frac{y_0}{h_0}.$$

t man diesen Wert unter G senkrecht zu A_0B_0 auf, so erman eine Dreiecksfläche, die von der vorstehend bereits :legten Fläche abgezogen, die in Fig. 17 a schraffierte ußfläche für die Spannkraft im Obergurtstab O liefert. :wiegt bei dem Klammerausdruck in Gl. (36) das zweite), so wird η_{m_0} positiv, d. h. im Obergurt tritt eine Zugauf.

2. Einflußlinie eines Untergurtstabes U.

;n derselben Weise wie für den Obergurtstab ergibt sich für eine rechts von G_u stehende Last $P = 1\,t$ nach Fig. 17

$$U = A\frac{x_u}{h_u} - H \cdot \frac{y_u}{h_u}$$

$$U = \frac{1 \cdot b \cdot x_u}{l \cdot h_u} - \frac{1 \cdot b \cdot g}{l \cdot f} \cdot \frac{y_u}{h_u} = \eta_{m_u}.$$

Die Einflußlinie für U ist wie unter 1 an die Tragwerkslinie A_0B_0 anzutragen. Man macht $A_0A' = +\frac{x_u}{h_u}$ und trägt unter dem Mittelgelenk G den Wert $\eta_{g_h} = \frac{l}{4f} \cdot \frac{y_u}{h_u}$ auf, wie Fig. 17 b zeigt. Die sich dadurch als Differenz ergebende schraffierte Fläche stellt die Einflußfläche für U dar, die negativ wird, sobald das zweite Glied in Gl. (39) überwiegt.

3. Einflußlinie einer Diagonale D.

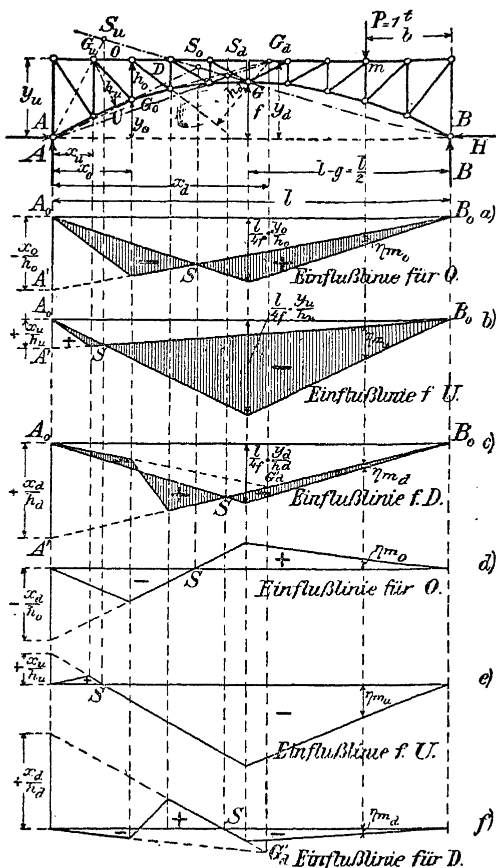
In bezug auf den Gegenpunkt G_d liefert die Momentengleichung für rechts von G_d stehende Lasten

$$D = A\frac{x_d}{h_d} - H\frac{y_d}{h_d}. \tag{40}$$

Insbesondere folgt für P = 1 t

$$D = \frac{1 \cdot b}{l} \cdot \frac{x_d}{h_d} - \frac{1 \cdot b \cdot g}{l \cdot f} \cdot \frac{y_d}{h_d} = \eta_{m_d}. \tag{41}$$

Hiernach läßt sich die Einflußfläche für D auch wieder als Differenz von 2 Flächen bilden. Das erste Glied liefert die Einflußfläche für die Diagonale eines einfachen Fachwerkträgers, die sich ergibt, wenn man senkrecht zur Tragwerkslinie A_0B_0 den Wert $A_0A' = +\frac{x_d}{h_d}$ aufträgt und beachtet, daß der Gegenpunkt G_d hier zwischen den Auflagern liegt. Das zweite Glied liefert die mit $\frac{y_d}{h_d}$ multiplizierte Einflußfläche für H, die durch die größte unter dem Mittelgelenk G liegende Ordinate $\eta_{g_h} = \frac{l}{4f} \cdot \frac{y_d}{h_d}$ festgelegt wird. Zieht man die beiden Flächen voneinander ab, so ergibt sich die in Fig. 17 c schraffierte Einflußfläche für D.



Einflußlinie für O.
Einflußlinie f. U.
Einflußlinie f. D.
Einflußlinie für O.
Einflußlinie f. U.
Einflußlinie für D.

Fig. 17.

Beachtet man, daß der Nullpunkt S der Einflußflächen immer unter der zugehörigen Belastungsscheide S_0, S_u oder S_d liegt, die der durch den entsprechenden Gegenpunkt gehende Kämpferdruck bestimmt, dann läßt sich die Konstruktion der Einflußlinien ganz wesentlich vereinfachen, wie ohne weiteres an den Fig. 17 d bis 17 f zu ersehen ist.

V. Abschnitt.

Die Formänderungen (Durchbiegungen) gerader vollwandiger Träger.

§ 12. Die elastische Linie (Biegungslinie).

Die Verbindungslinie der Schwerpunkte sämtlicher Querschnitte eines stabförmigen Körpers stellt dessen Längsschwerachse dar, die meistens kurz als Längsachse oder Stabachse bezeichnet wird. Wirken auf einen geraden stabförmigen Körper beliebige äußere Kräfte ein, deren Wirkungsebenen durch die Stabachse gehen, so erzeugen sie eine Verbiegung des Körpers, wobei dessen Längsachse in eine, im allgemeinen doppelt gekrümmte Linie übergeht, die man als elastische Linie bezeichnet. Gehen aber die Wirkungsebenen der Kräfte nicht durch die Stabachse, so erfährt der Körper außer der Verbiegung auch noch eine Verdrehung (Torsion); dieser Fall kommt bei Baukonstruktionen sehr selten vor und bleibt hier außer Betracht.

Alle auf einen Querschnitt s—s eines stabförmigen Körpers einwirkenden äußeren Kräfte (Fig. 18) können stets zu einer Mittelkraft R vereinigt werden, die durch eine in die Stabachse fallende Längskraft (Normalkraft) N, eine dazu senkrecht stehende Querkraft (Schubkraft) Q und ein Mo

ment $M = N \cdot f = R \cdot h$ ersetzt werden kann, wobei f bzw. h die Hebelarme der zugehörigen Kräfte in bezug auf den Schwerpunkt S des Querschnittes bedeuten. Hiernach lassen sich die Verbiegungen eines stabförmigen Körpers zurückführen auf die in seinen einzelnen Querschnitten wirksamen inneren Spannungen, die, den äußeren Kräften entsprechend, aus Längs- oder Normalspannungen, aus Schub- oder Scherspannungen und aus Biegungsspannungen bestehen.

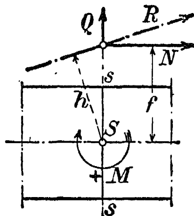


Fig. 18.

In weitaus den meisten praktischen Fällen sind lediglich die Biegungsspannungen zur Ermittelung der Formänderungen ausreichend, und die damit erhaltene elastische Linie wird kurz als Biegungslinie bezeichnet. Die Biegungslinie kann als eine aus einzelnen Kreisbögen bestehende Linie aufgefaßt werden.

§ 13. Der gerade vollwandige Träger unter dem Einfluß von Biegungsmomenten (Normalspannungen).

1. Verdrehungswinkel.

Die Biegungsspannungen werden unter der Voraussetzung ermittelt (vgl. S. G. Bd. 288, S. 86), daß die Trägerquerschnitte vor und nach der Einwirkung eines Biegungsmomentes eben sind und daß sie senkrecht zur Biegungslinie (elast. Linie) stehen. Zur Feststellung des Zusammenhangs zwischen Biegungsmoment und Biegungslinie wird ein gerader Träger betrachtet, in dessen Symmetrieebene das Moment M angreifen soll. Den symmetrischen aber veränderlichen Trägerquerschnitten F soll jeweils das Trägheitsmoment J zugehören. Aus dem Träger möge ein Stück ausgeschnitten sein (Fig. 19), dessen auf der Stabachse gemessene Länge d s so klein ist, daß die dafür in Frage kommenden Größen M, F und J als unveränderlich gelten können. Vor Einwirkung des Momentes M ist das Trägerstück durch die parallelen Schnitte AB und CD be-

grenzt; infolge der Einwirkung von M krümmt sich die Trägerachse, und die beiden Schnitte neigen sich um den Winkel $\Delta\varphi$ (Verdrehungswinkel) gegeneinander. Wird Schnitt AB festgehalten, so dreht sich Schnitt CD in die Lage EF; dabei erfahren alle Längsfasern des Trägers gewisse Längenänderungen, ausgenommen die auf N—N entfallende neutrale Faserschicht, die ihre ursprüngliche Länge ds beibehält und daher spannungslos sein muß. Auf der dem Krümmungsmittelpunkt O zugekehrten Seite von N—N werden die Fasern verkürzt, sie erfahren also Druckspannungen (+), und auf der abgewendeten Seite werden die Fasern verlängert, mithin erleiden sie Zugspannungen (—). Jeder Querschnitt wird von der neutralen Faserschicht in der neutralen Achse oder Nullinie n—n (Fig. 19) getroffen, die senkrecht auf der Symmetrieebene des Trägers steht und bei gleichartigem Trägermaterial durch den Schwerpunkt des Querschnittes hindurchgeht. Die Biegungsspannungen σ verteilen sich nach S. G. Bd. 288, § 23 gemäß der Gleichung

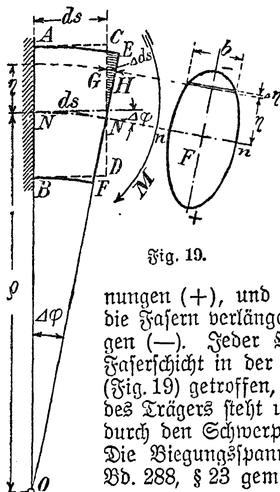


Fig. 19.

(42) $$\sigma = \pm \frac{M \cdot \eta}{J}$$

über einen Querschnitt, wobei η den Abstand der einzelnen Querschnittsfasern von der Nullinie angibt.

Aus den ähnlichen Dreiecken (Sektoren) ONN und NGH der Fig. 19 folgt

$$\frac{\eta}{\varrho} = \frac{GH}{ds};$$

hierbei stellt $\overline{GH} = \Delta ds$ die Verlängerung der im Abstand η von der Nullinie befindlichen Faser dar, deren ursprüngliche Länge ds war. Nach dem Gesetz der elastischen Dehnungen (Hookesches Gesetz, vgl. S. G. Bd. 288, S. 12) gilt aber

$$\varepsilon = \frac{\Delta ds}{ds} = \frac{\sigma}{E},$$

wenn E den Elastizitätsmodul des Trägermaterials bedeutet, folg-

lich wird

$$\frac{\eta}{\varrho} = \frac{\Delta\,ds}{ds} = \frac{\sigma}{E}.$$

Mit Rücksicht auf Gl. (42) folgt hieraus ganz allgemein

$$\frac{\eta}{\varrho} = \frac{M\eta}{EJ}$$

oder

(43) $$\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EJ}.$$

Dies ist die Gleichung für den Krümmungshalbmesser ϱ der elastischen Linie eines geraden Trägers. Diese zeigt, daß ϱ um so kleiner wird, je mehr bei gleichbleibendem E und J das Moment M wächst. Andererseits erkennt man, daß ϱ und J sich in gleicher Weise ändern, sobald E und M unveränderlich bleiben. Das Trägheitsmoment J ist somit ein Maß für die Biegsamkeit eines Trägers.

Fig. 20.

Wird senkrecht zu der bei A festgehaltenen (eingespannten) Achse eines geraden Trägerstückes AB (Fig. 20) das in jedem Achsenpunkt wirksame Moment M aufgetragen, so entsteht die Momentenfläche, kurz M-Fläche (F_M) genannt, die in Fig. 20 als Belastung des Freiträgers AB aufzufassen ist.

Nimmt man an, der Träger AB (Fig. 20) besitze zunächst nur ein elastisches Element Δx, das sich in der Entfernung x vom freien als Nullpunkt betrachteten Ende B befindet, so folgt aus dem zugehörigen schraffierten Sektor (Bogenmaß)

$$\Delta x = \varrho \cdot \Delta\varphi$$

oder für den Verdrehungswinkel der Endflächen von Δx

$$\Delta\varphi = \frac{\Delta x}{\varrho}.$$

Mit Rücksicht auf Gl. (43) wird schließlich

(44) $$\Delta\varphi = \frac{M \cdot \Delta x}{EJ}.$$

Bei unseren Baukonstruktionen dürfen mit Rücksicht auf die Sicherheit die Durchbiegungen nur sehr gering ausfallen, sie sollen $^1/_{500}$ bis $^1/_{1200}$ der freien Trägerlänge nicht überschreiten. Daher müssen auch die Winkel $\Delta\varphi$ sehr klein ausfallen, und es kann mit genügender Genauigkeit gesetzt werden

$$\Delta\varphi = \operatorname{tg}\Delta\varphi = \frac{\Delta x}{\varrho}$$

oder

(44 a) $$\operatorname{tg}\Delta\varphi = \frac{M \cdot \Delta x}{EJ}.$$

Wird die ganze Länge l des Trägers AB (Fig. 20) in Betracht gezogen, so folgt für die gegenseitige Verdrehung der Endquerschnitte A und B, wobei B nach B′ gelangt,

(45) $$\varphi = \sum_0^l \Delta\varphi = \sum_0^l \frac{M \cdot \Delta x}{EJ}.$$

Wenn nun in A eine Tangente an die Trägerachse gelegt wird, so gibt φ den Neigungswinkel der in B′ an die Biegungslinie gelegten Tangente gegenüber der ersteren an.

Setzt man auf die Trägerachse AB (Fig. 21) nicht die Momente M, sondern die Werte $\frac{M}{EJ}$, so stellt deren Gesamtheit die durch E · J reduzierte Momentenfläche

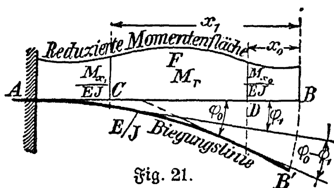


Fig. 21.

$$F_{M_r} = \sum_0^l \frac{M}{EJ}\Delta x$$

dar, und es gilt

(45 a) $$\varphi = F_{M_r}.$$

Für zwei beliebige Querschnitte C und D (Fig. 21) mit dem Abstand $x_0 - x_1$ wird die gegenseitige Verdrehung

(45 b) $$\varphi_0 - \varphi_1 = \sum_{x_0}^{x_1} \frac{M \cdot \Delta x}{EJ} = F_{M_r}^{0-1}.$$

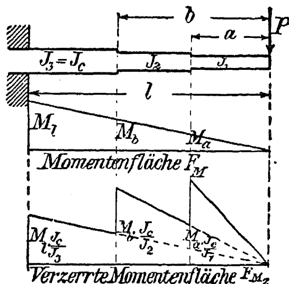


Fig. 22.

Ganz allgemein gilt:

Die gegenseitige Winkeländerung von zwei Trägerquerschnitten in beliebiger Entfernung ist gleich dem Inhalt der zwischen beiden befindlichen reduzierten Momentenfläche.

Besitzt ein Träger AB (Fig. 20) auf seiner ganzen Länge l gleichbleibendes E und J, so wird

$$\varphi = \frac{1}{EJ}\sum_0^l M \cdot \Delta x; \tag{46}$$

hierbei ist $\sum_0^l M\Delta x = F_M$ der Inhalt der einfachen Momentenfläche des ganzen Trägers AB, also

$$\varphi = \frac{1}{EJ} \cdot F_M = \frac{1}{EJ} \cdot (\text{M-Fläche}). \tag{46a}$$

Bei einem Träger mit gleichbleibendem E aber sprungweise sich änderndem J (Fig. 22) bildet man den Wert $\sum_0^l \frac{M\Delta x}{EJ}$ in der Weise, daß man die für die einzelnen Teilstücke berechneten Werte summiert. Werden letztere mit einem unveränderlichen Trägheitsmoment J_c multipliziert, wozu das größte oder das am häufigsten vorkommende J zu nehmen ist, so folgt

$$\sum_0^l \frac{M\Delta x}{EJ} = \frac{1}{EJ_c}\left[\sum_0^a M\frac{J_c}{J_1}\Delta x + \sum_a^b M\frac{J_c}{J_2}\Delta x + \sum_b^l M\frac{J_c}{J_3}\Delta x\right].$$

Der Klammerausdruck stellt die jeweils im Verhältnis $\frac{J_c}{J}$ verzerrte Momentenfläche F_{M_z} dar, und es gilt

$$\varphi = \frac{1}{EJ_c} \cdot F_{M_z}. \tag{47}$$

2. Durchbiegungen.

Der mit seiner Momentenfläche belastete Träger AB (Fig. 23) krümmt sich infolge der Einwirkung der Momente M und dabei gelangt sein freies Ende von B nach B′. Die lotrecht gemessene Ent-

fernung $BB' = y$ bezeichnet man als **Durchbiegung** des Trägers AB.

Besitzt der Träger AB zunächst nur **ein** elastisches Element Δx im Abstand x vom freien Ende B, so kann wegen der Kleinheit des Winkels $\Delta\varphi$ für die auf BB′ lotrecht gemessene zugehörige Durchbiegung Δy die zu $\Delta\varphi$ gehörige Bogenlänge gesetzt werden, also

$$\Delta y = x \cdot \Delta\varphi .$$

Mit Rücksicht auf Gl. (44) wird hieraus

(48) $$\Delta y = x \cdot \frac{M\Delta x}{EJ} .$$

Ist schließlich der Träger AB über seine ganze Länge l elastisch, so wird die Durchbiegung des freien Endes, wenn $BB' = y$ lotrecht gemessen wird,

(49) $$y = \sum_0^l \Delta y = \sum_0^l \frac{M\Delta x}{EJ} \cdot x .$$

Nun ist aber $\frac{M\Delta x}{EJ} \cdot x$ das statische Moment eines Elementes $\left(\frac{M \cdot \Delta x}{EJ} = w\right)$ der reduzierten Momentenfläche in bezug auf das freie Trägerende B, mithin stellt der Ausdruck

$$\sum_0^l \frac{M\Delta x}{EJ} \cdot x = St_r^{0-l} = M_w$$

das statische Moment der gesamten reduzierten Momentenfläche (F_{M_r}) in bezug auf B dar, und es gilt

(49a) $$y = St_r^{0-l} = M_w .$$

Ist die Einsenkung des Trägers AB (Fig. 23) an beliebiger Stelle C, im Abstand b vom freien Ende B, zu bestimmen, so ist, wie ohne weiteres aus Fig. 23 zu erkennen, die Summierung nur über die Strecke AC, d. h. von b bis l auszudehnen, also

(50) $$y_c = \sum_b^l \frac{M\Delta x}{EJ} \cdot \xi = St_r^{b-l} = M_w .$$

Hiernach gilt ganz allgemein:

Die Einsenkung (Durchbiegung) eines freien Trägerpunktes gegenüber einer durch einen festen Punkt desselben Trägers gehenden Wagerechten wird durch das stati-

sche Moment der zwischen den beiden Punkten auf dem Träger ruhenden reduzierten Momentenfläche in bezug auf den Ort der Durchbiegung (freier Trägerpunkt) bestimmt.

Besitzt der Träger AB (Fig. 23) auf seiner ganzen Länge l gleichbleibendes E und J, so wird

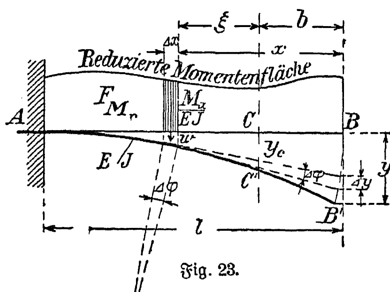


Fig. 23.

$$(51)\quad y = \frac{1}{EJ}\sum_0^l M\varDelta x\cdot x,$$

wobei $\sum_0^l (M\varDelta x)\, x = St$ das statische Moment der einfachen Momentenfläche (F_M) in bezug auf das freie Trägerende B angibt. Wird der Schwerpunktsabstand von F_M in bezug auf B mit x_s bezeichnet, so folgt

$$(51a)\qquad y = \frac{1}{EJ}\cdot St = \frac{1}{EJ}\cdot F_M\cdot x_s = \frac{1}{EJ}\cdot\left\{\begin{matrix}\text{Moment der}\\ \text{M-Fläche}\end{matrix}\right\}.$$

Hat man einen Träger mit gleichbleibendem E, aber sprungweise sich änderndem J, so wird (vgl. Fig. 22, S. 57) der Wert

$$St_r = \sum_0^l \frac{M\varDelta x}{EJ}\cdot x$$

mit einem unveränderlichen J_c multipliziert, und es folgt

$$(52)\qquad y = St_r\cdot\frac{J_c}{J_c} = \frac{1}{EJ_c}\sum_0^l M\frac{J_c}{J}\varDelta x\cdot x.$$

In diesem Ausdruck stellt die Summe das statische Moment St_z der im Verhältnis $\frac{J_c}{J}$ verzerrten Momentenfläche F_{M_z} dar, also

$$(52a)\qquad y = \frac{1}{EJ_c}\cdot St_z.$$

Wird nur die Strecke AC des Trägers AB (Fig. 24) durch Biegungsmomente M beeinflußt, so krümmt sich lediglich die mit der Momentenfläche belastete Strecke AC, während der übrige Teil

CB = b in Richtung der in C an die Biegungslinie gelegten Tangente verläuft. Es wird somit die Durchbiegung des freien Endes B nach Fig. 24

(53) $$y_b = y_c + b \cdot \varphi_c .$$

Mit den durch die Gl. (50) und (45a) gegebenen Werten wird

(53a) $$y_b = St_r^{b-1} + b \cdot F_{M_r}^{b-1} .$$

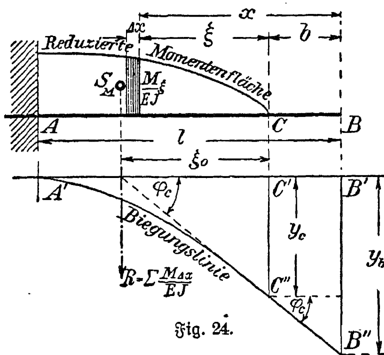


Fig. 24.

Bezeichnet man mit ξ_0 den Schwerpunktsabstand der reduzierten Momentenfläche (F_{M_r}) in bezug auf C, so wird $St_r = F_{M_r} \cdot \xi_0$, und es folgt

(53b) $$y_b = F_{M_r}^{b-1}(\xi_0 + b) .$$

Also auch hier ist die Einsenkung des freien Trägerendes gleich dem statischen Moment der den Träger nur teilweise belastenden reduzierten Momentenfläche in bezug auf den Ort der Einsenkung

Insbesondere wird mit gleichbleibendem E und J

(53c) $$y_b = \frac{1}{EJ} F_M(\xi_0 + b) .$$

Das angegebene Verfahren zur Bestimmung der Verdrehungen bzw. Durchbiegungen gilt ganz allgemein, denn man kann von jedem Träger ein Stück abschneiden, das dem vorstehend behandelten Träger entspricht, auch bleibt es richtig, wenn der Träger unter einem kleinen Neigungswinkel $\Delta\varphi$ eingespannt wird.

Insbesondere sei noch die Durchbiegung des Trägers auf zwei Stützen behandelt.

Für einen einfachen Träger AB (Fig. 25), zu dessen beliebiger äußerer Belastung die auf dem Träger ruhende reduzierte Momentenfläche gehört, soll die Durchbiegung im Punkt C ermittelt werden.

Die gebogene Linie A'C''B' stellt die Biegungslinie des Trägers AB dar, die an der Stelle C die Durchbiegung C'C'' = y_c

liefert. Legt man in C'' eine Tangente A''B'' an die Biegungslinie und denkt sich den Träger bei C festgehalten, so können die beiden Teilstücke A'C'' bzw. B'C'' als die Biegungslinien von zwei bei C eingespannten Trägern mit den Längen AC = a bzw. BC = b angesehen werden, und für die Durchbiegung ihrer freien Enden gilt nach Gl. (49) (S. 58)

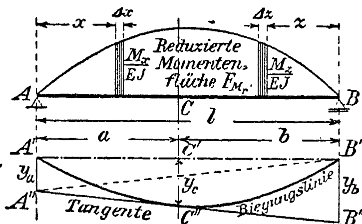


Fig. 25.

$$y_a = \sum_0^a \frac{M \cdot \Delta x}{EJ} \cdot x = S t_r^{0-a},$$

$$y_b = \sum_0^b \frac{M \cdot \Delta z}{EJ} \cdot z = S t_r^{0-b}.$$

Mit diesen Werten erhält man für die wirkliche Durchbiegung y_c aus Fig. 25

$$y_c = y_a \cdot \frac{b}{l} + y_b \frac{a}{l},$$

(54)
$$y_c = \frac{b}{l} \sum_0^a \frac{M \Delta x}{EJ} \cdot x + \frac{a}{l} \sum_0^b \frac{M \Delta z}{EJ} \cdot z$$

$$= \frac{b}{l} \sum_0^a w \cdot x + \frac{a}{l} \sum_0^b w \cdot z = M_w,$$

oder

(54 a)
$$y_c = \frac{b}{l} S t_r^{0-a} + \frac{a}{l} S t_r^{0-b}.$$

Dieser Ausdruck ist aber weiter nichts als das Biegungsmoment an der Stelle C eines einfachen Trägers AB, der mit seiner reduzierten Momentenfläche (F_{M_r}) bzw. deren Einzelteilen

$$w = \frac{M \Delta x}{EJ} = \frac{M \Delta z}{EJ}$$

belastet ist, wie sich aus dem Vergleich der Gl. (54) mit dem Moment eines einfachen, durch Einzellasten P beanspruchten Trägers AB (Fig. 26) ergibt. Denn für die Stelle C desselben gilt

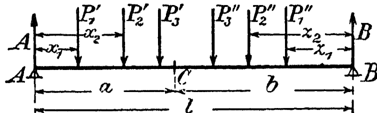


Fig. 26.

$$M_c = \frac{a}{l}\sum_0^l P \cdot z - \sum_0^a P(a - x)$$

$$= \frac{a}{l}\sum_0^a P \cdot z + \frac{a}{l}\sum_a^l P \cdot z - \sum_0^a P(a - x)$$

$$= \sum_0^a Pz \cdot \frac{a}{l} - \sum_0^a P(a - x)\frac{l}{l} + \frac{a}{l}\sum_a^l P \cdot z$$

$$= \sum_0^a \frac{P}{l}(az - al + lx) + \frac{a}{l}\sum_0^b P \cdot z$$

$$= \frac{1}{l}\sum_0^a P[-a(l - z) + lx] + \frac{a}{l}\sum_0^b P \cdot z$$

$$= \frac{1}{l}\sum_0^a Px(l - a) + \frac{a}{l}\sum_0^b P \cdot z,$$

(54 b) $$M_c = \frac{b}{l}\sum_0^a P \cdot x + \frac{a}{l}\sum_0^b P \cdot z = M_P\,.$$

Wird P durch w ersetzt, so erhält man Gl. (54).
Für unveränderliches E und J gilt mit w′

(54 c) $$y_c = \frac{1}{EJ}\left[\frac{b}{l}\sum_0^a M\varDelta x \cdot x + \frac{a}{l}\sum_0^b M\varDelta z \cdot z\right]$$

$$= \frac{1}{EJ}\left[\frac{b}{l}\sum_0^a w' \cdot x + \frac{a}{l}\sum_0^b w' \cdot z\right] = \frac{M_{w'}}{EJ}\,.$$

Dies ist das Moment für eine aus der einfachen Momentenfläche (F_M) bzw. deren Teilen $w' = M\varDelta x$ bestehende Belastung.

§ 14. Graphische Darstellung der Biegungslinie (elast. Linie) gerader vollwandiger Träger. (nach Mohr).

a) Der einseitig eingespannte Träger AB (Fig. 27) mit unveränderlichem E und J.

Nach den vorangehenden Entwicklungen ist der Träger AB mit seiner Momentenfläche zu belasten, die von den auf AB einwirkenden äußeren Kräften erzeugt wird. Durch Teilung der Momentenfläche in schmale lotrechte Streifen $w' = M\varDelta x$, erhält man die als Einzellasten wirkenden elastischen Gewichte (Winkeländerungen). Setzt man die

elastischen Gewichte w′ zu einem Kräftezug $\overline{ab} = \sum_1^{15} w'$ $= \sum_0^1 M\Delta x$ zusammen, so kann dazu mit beliebiger Polweite H das Seileck A′B″ gezeichnet werden (vgl. I. Teil, § 26, 1). Werden für ein beliebiges Gewicht $w' = M\Delta x$ (in Fig. 27 schraffiert) die zugehörigen Seileckseiten bis zur Lot-

Fig. 27.

rechten durch den freien Trägerpunkt B verlängert, so schneiden sie auf dieser die Strecke Δy ab. Gleichzeitig entsteht das schraffierte Dreieck, das dem entsprechenden, ebenfalls schraffierten Dreieck des Kraftecks ähnlich ist, und daher gilt $(M \cdot \Delta x) : H = \Delta y : x$ oder

(55) $$\Delta y = \frac{(M\Delta x) \cdot x}{H} = \frac{w'x}{H}.$$

Wird nun insbesondere $H = E \cdot J$ gemacht, so folgt

$$\Delta y = \frac{M\Delta x}{EJ} \cdot x = \frac{w' \cdot x}{EJ};$$

dies ist aber der bereits durch Gl. (48) S. 58 festgelegte Wert.

Wiederholt man vorstehende Ableitung für alle übrigen $w' = M \Delta x$ der Belastungsfläche, so summieren sich die Δy zur Gesamtdurchbiegung $B'B'' = y_b$, die unter dem freien Trägerende B durch die der Gesamtbelastung entsprechenden äußersten Seileckseiten abgeschnitten wird, also

$$y_b = \sum_0^1 \Delta y = \frac{1}{EJ} \sum_0^1 M \Delta x \cdot x = \frac{1}{EJ} \sum_0^1 w' \cdot x = \frac{1}{EJ} M_{w'};$$

dies ist aber der bereits in Gl. (51), S. 59 festgelegte Wert.

Für einen beliebigen Querschnitt C zwischen A und B (Fig. 27) ergibt sich in gleicher Weise

$$\Delta y_c = \frac{M \Delta x}{EJ} \cdot \xi$$

bzw.

$$y_c = \frac{1}{EJ} \sum_b^1 M \Delta x \cdot \xi,$$

ein Wert, der sich für gleichbleibendes E und J auch aus Gl. (50) ergibt. Hiernach stellen die zwischen dem Seileck A'B'' und seiner verlängerten ersten Seite A'B' liegenden Ordinaten y, jeweils unter der Berührungsstelle von zwei elastischen Gewichten, die Durchbiegungen des Trägers AB (Fig. 27) dar. Wird die Breite Δx der elastischen Gewichte unendlich klein, so geht das Seileck A'B'' in die **Biegungslinie des Trägers AB** über. Die durch die statischen Momente der Momentenfläche bestimmte Biegungslinie kann somit immer als Seileck dargestellt werden, und es gilt ganz allgemein:

Wird ein auf einer Seite festgehaltener Träger mit seiner Momentenfläche belastet, die durch senkrecht zur Trägerachse geführte Schnitte in viele schmale Streifen zerlegt ist, deren Inhalte als Gewichte w aufzufassen sind, so stellt das zu diesen Ge-

wichten mit der Polweite $E \cdot J$ gezeichnete Seileck die Biegungslinie dar.

Reicht die Momentenfläche nicht bis zum freien Ende B des Trägers AB (Fig. 24), so findet man die Durchbiegung an dieser Stelle, indem man die zum letzten elastischen Gewicht gehörende Seileckseite bis zur Lotrechten durch B verlängert, wie Fig 24 zeigt.

Bei einem Träger mit veränderlichem J ist die Biegungslinie in gleicher Weise zu bestimmen, dabei ist jedoch entweder die reduzierte Momentenfläche (F_{M_r}) oder die verzerrte Momentenfläche (F_{M_z}), vgl. Fig. 22, auf den Träger zu setzen. Im ersten Falle erhält man die elastischen Gewichte $w = \frac{M \Delta x}{EJ}$ bzw. $w'' = \frac{M \Delta x}{J}$, die gemäß Gl.(55), S. 63 mit der Polweite $H = 1$ bzw. $H = E$ die Biegungslinie liefern. Im zweiten Falle hat man die elastischen Gewichte $w''' = M \frac{J_c}{J} \Delta x$ (vgl. S. 57), die mit der Polweite $H = E \cdot J_c$ die Biegungslinie ergeben.

Handelt es sich um einen Träger mit sprungweise veränderlichem J, dann kann die Biegungslinie vorteilhaft so gezeichnet werden, daß man die einfache Momentenfläche (F_M) auf den Träger setzt und jeweils eine mit den Trägheitsmomenten des Trägers J_1, J_2, J_3 usw. wechselnde Polweite $H_1 = E \cdot J_1$, $H_2 = E \cdot J_2$, $H_3 = E \cdot J_3$ usw. verwendet, wie Fig. 28 zeigt.

Für den einseitig eingespannten Träger AB (Fig. 28) mit den Trägheitsmomenten J_1, J_2 und J_3, der von einem durchgehends gleichen Moment M in Anspruch genommen ist, soll die Biegungslinie gezeichnet werden.

Zunächst setzt man wieder die elastischen Gewichte w'_1 bis w'_{15} zu einem Kräftezug $\overline{ab} = \sum_1^{15} w' = \sum_0^1 M \Delta x$ zusammen, muß aber dann für die über den einzelnen Trägerstücken mit den Trägheits-

momenten J_1, J_2 bzw. J_3 liegenden elastischen Gewichte jeweils eine besondere Polweite bestimmen. Die Polweite erhält für die Gruppe w'_1 bis w'_6 über J_1 den Wert $H_1 = E \cdot J_1$, für die Gruppe w'_7 bis w'_{11} über J_2 den Wert $H_2 = E \cdot J_2$ und für die Gruppe w'_{12} bis w'_{15} über J_3 den Wert $H_3 = E \cdot J_3$. Mit den dadurch festgelegten Polen O_1, O_2 und O_3, von denen O_2 und O_3 auf entsprechenden Parallelen zum

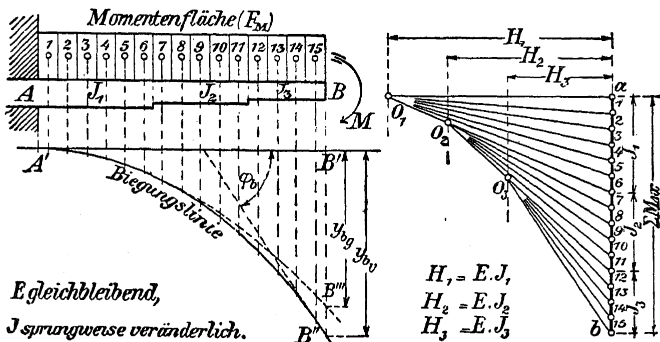


Fig. 28.

Kräftezug liegen müssen, wird die Biegungslinie A′B″ gezeichnet, die die größte Durchbiegung $B'B'' = y_{b_v}$ liefert. Zum Vergleich ist auch noch die Biegungslinie A′B‴ für ein durchgehends gleiches J_1 eingetragen (gestrichelt), die eine entsprechend kleinere Durchbiegung $B'B''' = y_{b_g}$ ergibt.

b) Der Träger auf 2 Stützen mit unveränderlichem E und J.

Für den Träger AB (Fig. 29) soll die durch eine beliebige äußere Belastung hervorgebrachte Durchbiegung an beliebiger Stelle C graphisch bestimmt werden.

Setzt man die von der Belastung herrührende Momentenfläche auf den Träger AB und zerlegt sie in eine große Zahl elastischer Gewichte $w' = M \Delta x = M \Delta z$, so ist das zu letzteren mit der Polweite $H = E \cdot J$ gezeichnete Seileck A′C″B′ die Biegungslinie des Trägers AB, die mit ihrer Schlußlinie

A′B′ an der fraglichen Stelle C die Durchbiegung C′C″ = y_c begrenzt. Dies läßt sich kurz beweisen.

Wird die y_c begrenzende Seileckseite bis zu den Auflagerlotrechten verlängert, so erhält man die Abschnitte A′A″ bzw. B′B″, die die Durchbiegungen eines bei C festgehaltenen

Fig. 29.

Trägers gegenüber der Tangente in C angeben. Verlängert man die zu einem bestimmten elastischen Gewicht (5), links von C, gehörenden Seileckseiten, so ergibt sich das schraffierte Dreieck, das dem ebenfalls schraffierten Dreieck im Krafteck ähnlich ist, mithin gilt

$$(M \varDelta x) : EJ = \varDelta y_a : x \text{ oder } \varDelta y_a = \frac{(M \varDelta x)}{EJ} \cdot x = \frac{1}{EJ} w' \cdot x.$$

Für die sämtlichen elastischen Gewichte der Strecke AC = a ergibt sich schließlich $\Sigma \varDelta y_a = y_a = A'A''$ oder

$$y_a = \frac{1}{EJ} \sum_0^a (M \varDelta x) \cdot x = \frac{1}{EJ} \sum_0^a w' x.$$

In gleicher Weise folgt für die elastischen Gewichte auf der

rechts von C gelegenen Strecke $\overline{BC} = b$, daß $B'B'' = \Sigma \Delta y_b = y_b$ ist, oder

$$y_b = \frac{1}{EJ}\sum_0^b (M \Delta z)\, z = \frac{1}{EJ}\sum_0^b w' \cdot z\,.$$

Mit diesen Werten wird schließlich die Durchbiegung unter C, nach Fig. 29, $y_c = y_a \frac{b}{l} + y_b \frac{a}{l}$ oder

$$y_c = \frac{1}{EJ}\left[\frac{b}{l}\sum_0^a (M \Delta x)\, x + \frac{a}{l}\sum_0^b (M \Delta z)\, z\right]$$

$$= \frac{1}{EJ}\left[\frac{b}{l}\sum_0^a w' \cdot x + \frac{a}{l}\sum_0^b w' \cdot z\right] = \frac{1}{EJ} M_{w'}.$$

Da dieser Ausdruck mit Gl. (54 c) S. 62 übereinstimmt, so ist die Richtigkeit der Konstruktion in Fig. 29 erwiesen.

Bei Trägern mit veränderlichem E und J wird man wieder wie früher (S. 65) die reduzierte bzw. die verzerrte Momentenfläche und $w = \frac{M \Delta x}{EJ}$ bzw. $w''' = M \frac{J_c}{J} \cdot \Delta x$ benutzen. Ändert sich J nur sprungweise, dann sind veränderliche Polweiten vorzuziehen (vgl. Fig. 28).

Aus der Gl. (55) $\Delta y = \frac{w' \cdot x}{H}$ erkennt man, daß eine Verkleinerung von H eine Vergrößerung von Δy bzw. y zur Folge hat, während aus Fig. 27 folgt, daß jede Verkleinerung des Längenmaßstabes der Zeichnung eine entsprechende Verkleinerung von y bedingt. Sollen also die Durchbiegungen eines im Maßstab 1 : n gezeichneten Trägers mit gleichbleibendem E und J in natürlicher Größe erscheinen, so muß die Polweite $H = \frac{E \cdot J}{n}$ sein. Wird jedoch eine m-fache Vergrößerung der Durchbiegungen verlangt, so ist H auf das m-fache zu verkleinern, also $H = \frac{E \cdot J}{n \cdot m}$ zu nehmen. In Gl. (55) erscheinen Δy und x in der gleichen Längeneinheit, mithin müssen die elastischen Gewichte w' und die Polweite H die gleiche Krafteinheit besitzen, wie

sich auch unmittelbar aus der Dimension dieser Größen ergibt; $(M\varDelta x)$ ist in $mt \cdot m = m^2t$ und $E \cdot J$ in $\frac{t}{m^2} \cdot m^4 = m^2t$ zu messen. Da $\varDelta y$ außer von x nur von dem Quotienten $\frac{w'}{H}$ abhängt, so wird es vom Kräftemaßstab nicht beeinflußt und dieser kann deshalb jeweils der Zeichnung entsprechend gewählt werden.

Die Durchbiegungen (Formänderungen) bilden die Grundlage zur Berechnung aller statisch unbestimmten Träger.

VI. Abschnitt.

Die Formänderungen (Durchbiegungen) einfacher ebener Fachwerkträger.

§ 15. Allgemeine Betrachtungen.

Ein statisch bestimmter ebener Fachwerkträger erfährt unter der Einwirkung äußerer Kräfte gewisse innere Stabspannungen S, die gemäß Teil I, Abschnitt V zu ermitteln sind. Besitzt ein Stab den Querschnitt F und die Länge s, dann erleidet er durch S eine Längenänderung $\varDelta s$, die nach S. G. Bd. 288, § 2 bestimmt ist zu

(56) $$\varDelta s = \frac{1}{E}\sigma s = \pm \frac{Ss}{EF} = \varepsilon s,$$

wobei das obere Vorzeichen für Zug- das untere für Druckspannungen gilt, oder ε die Dehnung eines Stabes darstellt. Erfahren alle Punkte des Stabes gleiche Temperaturerhöhung um t°, so tritt eine weitere Längenänderung auf

(56a) $$\varDelta s' = \omega t s,$$

wobei ω das Dehnungsverhältnis für 1 Grad C bedeutet.

Ändert der Stab AB (Fig. 30 a) irgend eines Fachwerkes seine Lage und Länge, wobei er von AB nach A_1B_1 kommt, so können diesen Änderungen aus drei Bewegungen zusammengesetzt werden:

1. einer Parallelverschiebung von AB nach A_1B',

2. einer Dehung des Stabes $\pm \Delta \overline{AB}$ $\left(\begin{smallmatrix}+ \text{ Verlängeru} \\ - \text{ Verkürzung}\end{smallmatrix}\right.$ wobei der Endpunkt B′ nach B″ gelangt, und
3. einer Drehung um den kleinen Winkel φ, wo die Endlage A_1B_1 erreicht wird; hierbei kann der K bogen $B''B_1$ durch eine Senkrechte zur Stabrich AB ersetzt werden.

Trägt man die Wege der Endpunkte des Stabes AB einem festen Punkt, dem Pol O, als Strecken auf (Fig.

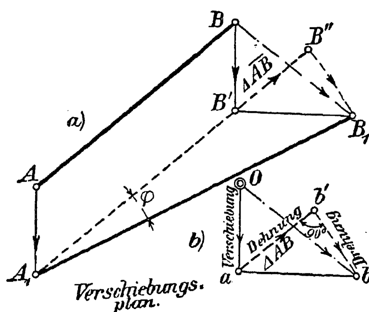


Fig. 30.

und verbindet die punkte dieser Strecken einander, so entsteht Linienzug, den man schiebungsplan auch Geschwindigk plan des Stabes nennt.

Führt ein starres bilde ABCD (Fig. kurz Scheibe genann seiner Ebene eine kleine Bewegung au kann diese als eine Drehbewegung um einen festen P den Pol P, aufgefaßt werden. Sind die augenblicklicher wegungsrichtungen von irgend zwei Scheibenpunkten geg so errichtet man in diesen Punkten Senkrechte auf der wegungsrichtungen und erhält in ihrem Schnittpunk Pol P. Die Bewegungsrichtungen aller übrigen Punkte jeweils senkrecht auf der zugehörigen Verbindungslini dem Pol P. Die augenblicklichen Bewegungen v_a, v_b … schwindigkeiten) der einzelnen Punkte müssen ihrem Ab vom Pol P proportional sein; trägt man dieselben Größe, Richtung und Sinn von einem festen Punkt, den

O, auf und verbindet ihre Endpunkte miteinander, so entsteht der sog. Verschiebungsplan abcd (Fig. 31 b), der ein dem gegebenen ähnliches Gebilde darstellt, das eine um 90° gedrehte Lage hat.

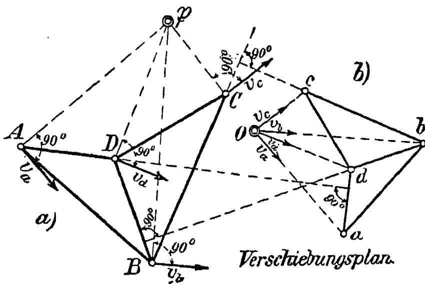


Fig. 31.

Aus Fig. 31 folgt weiter, daß der Verschiebungsplan eines starren Gebildes gegeben ist, sobald die Verschiebungen von irgend zwei Punkten desselben bekannt sind, weil die Seiten des Verschiebungsplanes auf denen des gegebenen Gebildes senkrecht stehen müssen.

§ 16. Verschiebungsplan eines elastischen Stabwerkes.

Für das in Fig. 32 gegebene Stabwerk ABC soll die Verschiebung des Punktes C bestimmt werden, wenn der Stab

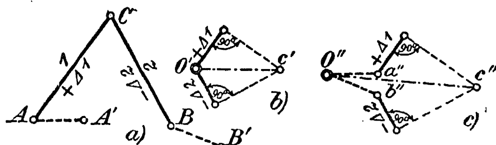


Fig. 32.

AC = 1 eine Verlängerung $+\Delta 1$, der Stab BC = 2 eine Verkürzung $-\Delta 2$ und die Punkte A und B ihre Lage um gewisse Strecken AA' bzw. BB' verändern.

Wird zunächst die Verschiebung der Punkte A und B außer acht gelassen, so ergibt sich nur die von den Längenänderungen

der Stäbe erzeugte Verschiebung von C. Man setzt an einen festen Pol O′ (Fig. 32 b) nach Größe und Richtung die Stablängenänderungen $+\Delta 1$ und $-\Delta 2$, errichtet in deren Endpunkten Lote, die sich im Punkt c′ schneiden, und erhält damit den Verschiebungsplan, der in der Strecke O′c′ die Verschiebung von C liefert.

Beim Auftragen eines Verschiebungsplanes ist der Sinn der Längenänderungen sorgfältig zu beachten. Ist der Stab AC = 1 in A fest, so kann er sich nur in der Richtung AC dehnen, folglich ist $+\Delta 1$ von O′ aus in der Stabrichtung AC anzutragen. Der Stab BC = 2 ist in B fest, er kann daher nur in der Richtung CB zusammengedrückt werden, mithin ist $-\Delta 2$ von O′ aus entgegen der Stabrichtung, also im Sinne CB anzutragen. Erleiden nun auch die Punkte A und B des Stabwerkes ABC je eine Verschiebung, so sind diese zunächst an einen festen Pol O″ anzutragen (Fig. 32 c), in ihren Endpunkten a″ bzw. b″ werden die Stablängenänderungen $+\Delta 1$ bzw. $-\Delta 2$ angesetzt und in deren Endpunkten Senkrechte errichtet, die sich in c″ schneiden. Damit ist der gesamte Verschiebungsplan gezeichnet, dessen Strecke O″c″ die endgültige Verschiebung von C liefert.

Durch wiederholte Anwendung dieses Verfahrens kann der Verschiebungsplan eines Fachwerkträgers gezeichnet werden. Hierbei ist zunächst ein Punkt und die Richtung eines Stabes als fest anzunehmen. Zum Schluß aber sind die Bewegungen der Auflagerpunkte mit den möglichen Auflagerverschiebungen in Einklang zu bringen, was unter Umständen durch eine Drehung des ganzen Fachwerkträgers erfolgen muß (vgl. Fig. 31).

Die Verschiebungspläne werden oft nach ihrem Erfinder Williot benannt.

Beispiel 1. Für den in Fig. 33 dargestellten eisernen Vordach-

binder, der an der Mauer unverschieblich befestigt ist, sollen die lotrechten Durchbiegungen ermittelt werden.

Man bestimmt die von der äußeren Belastung ΣP und dem Eigengewicht herrührenden Stabkräfte S (vgl. I. Teil, V. Abschnitt)

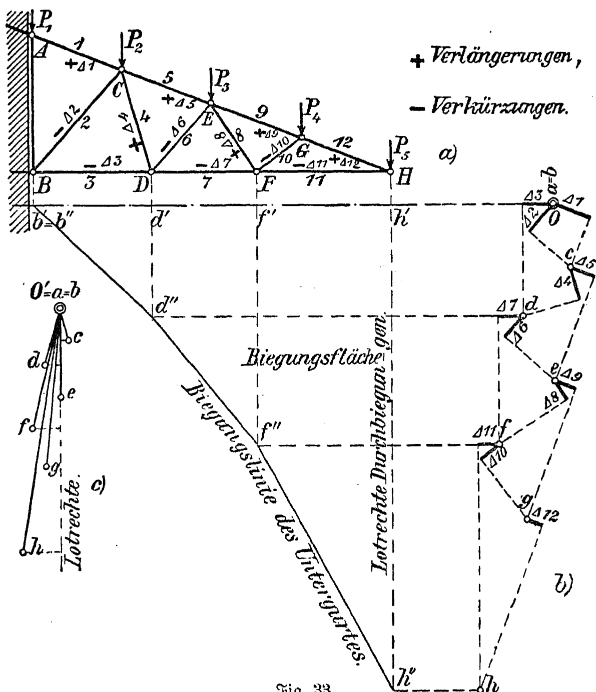


Fig. 33.

und berechnet damit die Längenänderungen Δs der Stäbe nach Gl. (56) S. 69; wobei die Stabquerschnitte ohne Nietabzug zu nehmen sind. Die sich ergebenden Verlängerungen sind in Fig. 33 a durch +, die Verkürzungen durch — angegeben; da dies aber überaus kleine Größen sind, so wird man sie im Verschiebungsplan, je

nach dem Maßstab der Zeichnung, in natürlicher Größe oder besser in 20- bis 30facher Vergrößerung auftragen.

Nunmehr wird ein Pol O gewählt (Fig. 33 b). Da die Knotenpunkte A und B sich nicht verschieben können, so fallen die ihnen entsprechenden Punkte a und b des Verschiebungsplanes mit dem Pol O zusammen. Stab AC = 1 verlängert sich um $\varDelta 1$, mithin ist $\varDelta 1$ von O aus in der Richtung des Stabes, also im Sinne AC aufzutragen; Stab BC = 2 verkürzt sich um $\varDelta 2$, daher ist $\varDelta 2$ von O aus gegen die Richtung des Stabes, also im Sinne CB aufzutragen. Die in den Endpunkten von $\varDelta 1$ und $\varDelta 2$ errichteten Senkrechten schneiden sich im Punkt c und die Strecke O c stellt die Verschiebung des Knotenpunktes C nach Größe, Richtung und Sinn dar. Wird nunmehr die Verschiebung des Knotenpunktes D gesucht, so sind die Knotenpunkte B und C als fest anzusehen, und von den ihnen entsprechenden Punkten a und c des Verschiebungsplanes sind die Stablängenänderungen in der gleichen Weise wie vor anzutragen, wodurch sich der Punkt d bzw. die Verschiebung O d ergibt. Setzt man dieses Verfahren fort, so ergeben sich nacheinander die Punkte e, f, g und h und die entsprechenden Knotenpunktsverschiebungen O e, O f, O g und O h. Werden die letzteren an einen Pol O′ nach Größe (in Fig. 33 c auf die Hälfte verkürzt), Richtung und Sinn angetragen und auf eine Lotrechte projiziert, so erhält man für die sämtlichen Knotenpunkte die lotrechten Durchbiegungen sowie die wagerechten Verschiebungen.

Wird in Fig. 33 a durch jeden Knotenpunkt des Untergurtes eine Lotrechte gezogen und darauf die zugehörige Verschiebung aus Fig. 33 b projiziert, so erhält man auch die lotrechten Durchbiegungen d′ d″, f′ f″ und h′ h″. Verbindet man die Endpunkte der letzteren durch den gebrochenen Linienzug b″ d″ f″ h″, so stellt dieser das Biegungspolygon oder die Biegungslinie für den Untergurt des Vordachbinders dar. Die von der Wagerechten b′ h′ und der Biegungslinie eingeschlossene Fläche heißt Biegungsfläche.

Beispiel 2. Für einen statisch bestimmt aufgelagerten einfachen Fachwerkträger AF (Fig. 34) sind die von den äußeren Lasten P_1 und P_2 erzeugten Durchbiegungen zu ermitteln.

Auch hier wird man zunächst die Stabkräfte S und die Stablängenänderungen $\pm \varDelta s$ ermitteln, die in Fig. 34 a angegeben sind.

Sodann wird wieder ein Pol O gewählt und der Verschiebungsplan gezeichnet, wobei zunächst der Stab AB = 1 (in Fig. 34 a anschraffiert) festgehalten wird, derart, daß er in der Stabrichtung be-

weglich bleibt. Der Punkt A liegt fest, somit fällt a auf O und die Verkürzung $\Delta 1$ des Stabes AB ist entgegen der Stabrichtung, also im Sinne BA von O aus anzutragen, wodurch sich der Punkt b ergibt. Hierdurch sind zwei feste Punkte geschaffen, von denen aus die Verschiebung des damit verbundenen Punktes C festgelegt werden kann. Die Verlängerung $\Delta 2$ des Stabes AC ist von O (= a) aus im Sinne AC und die Verkürzung $\Delta 3$ des Stabes BC ist von b aus entgegen der Stabrichtung, also im Sinne CB anzutragen. Die in den Enden der Stablängenänderungen angetragenen Senkrechten schneiden sich im Punkt c, und die Strecke Oc gibt die Verschiebung des Knotenpunktes C nach Größe, Richtung und Sinn an. In derselben Weise werden die Verschiebungen aller übrigen Knotenpunkte bestimmt. Schließlich erhält man in der Strecke Of die Verschiebung des Punktes F.

Fig. 34.

Der Punkt F (Auflager) kann aber in Wirklichkeit nur eine wagerechte Verschiebung in Richtung AF erleiden, es muß daher das Fachwerk AF noch so um A gedreht werden, daß die lotrechte Projektion der Verschiebung O f verschwindet und nur die mögliche wagerechte Verschiebung f f′ des beweglichen Auflagers F übrigbleibt. Die Drehung erfolgt senkrecht zur Geraden AF, die sich dabei ergebenden Verschiebungen der einzelnen Fachwerkknoten müssen gemäß Fig. 31, S. 71 eine zum gedrehten Fachwerk senkrecht stehende und ähnliche Figur liefern, von der die Verschiebungen der beiden

Punkte A und F bekannt sind Zeichnet man also zwischen O und f' die dem Fachwerk ähnliche Figur mit den Knotenpunkten a' b' c' d' e' f' ein, so erhält man in c' O, d' O usw. die durch die Drehung entstehenden Verschiebungen, die mit den anderen zusammenzusetzen sind. Aus c' O und O c folgt die Gesamtverschiebung c' c des Knotenpunktes C, und in gleicher Weise ist an den übrigen Knotenpunkten bis F zu verfahren.

Zieht man wieder Lote durch die unteren Knotenpunkte des Fachwerks und projiziert die Durchbiegungen auf diese, so ergibt sich in dem Linienzug a'' c'' e'' f'' die Biegungslinie für den Untergurt des Fachwerkträgers AF, die mit ihrer Schlußlinie a''' c''' e''' f''' die entsprechende Biegungsfläche einhüllt.

Meistens wird der in vorstehender Weise gezeichnete Verschiebungsplan sehr lang, daher ist es vorteilhafter einen möglichst in Trägermitte gelegenen Stab mit zunächst fester Richtung und einem festen Punkt zum Ausgangspunkt zu nehmen. Das Verfahren bleibt wie vor, nur ist besonders auf die Drehung zu achten.

§ 17. Die Biegungslinie einfacher Fachwerkträger.

Nicht immer ist es praktisch, Williotsche Verschiebungspläne zum Aufzeichnen der Biegungslinien zu benutzen, es sei daher noch ein anderes, rechnerisch-zeichnerisches Verfahren angegeben.

a) Zunächst sei angenommen, daß unter der Einwirkung äußerer Lasten nur die Gurtstäbe ihre Länge ändern, während die Wandstäbe (Diagonalen) die ursprüngliche Länge beibehalten. Wird dementsprechend ein einfacher Fachwerkträger AB (Fig. 35) betrachtet, der an einem inneren Wandstab in der Richtung m—n festgehalten wird, so erkennt man, daß die Gurtlängenänderungen eine Krümmung des Trägers hervorbringen; hierbei bleibt der auf m—n fallende Punkt G liegen, während Endpunkt A nach A' und Endpunkt B nach B' gelangt. Ändert der Stab EF seine Länge s um Δs, so wird auch der zugehörige, am Gegenpunkt G des Stabes

liegende Winkel ψ eine Änderung

(57) $$\Delta\psi = \frac{\Delta s}{h}$$

erfahren, wobei h den senkrechten Abstand zwischen Stab und Gegenpunkt bedeutet. Durch die Vergrößerung des Winkels ψ um $\Delta\psi$ muß aber das rechts von m—n gelegene Trägerstück eine Drehung um G ausführen, die gleich $\Delta\psi$ ist. Dabei

Fig. 35.

hebt sich das Auflager B um das Maß $\Delta y_b = \Delta\psi \cdot b$, wobei die Bogenlänge, wie bei kleinen Winkeln immer zulässig, gleich ihrer Projektion auf die Tangente gesetzt ist. Für irgendeinen anderen Gegenpunkt G′ mit dem Winkel ψ' und der Änderung $\Delta\psi'$ gilt ebenfalls $\Delta y'_b = \Delta\psi' \cdot z$, und wenn an allen rechts von m—n liegenden Gurtstabgegenpunkten Winkeländerungen auftreten, wird schließlich $BB' = y_b$ die Gesamthebung; also

$$y_b = \sum \Delta y_b = \sum_0^b \Delta\psi \cdot z = St_\psi^{0-b},$$

denn der Wert $\sum_0^b \Delta\psi \cdot z$ stellt das statische Moment aller von 0 bis b vorhandenen Winkeländerungen beider Gurten in be-

zug auf das beweglich angenommene Trägerende B dar. In der gleichen Weise erhält man auch für alle links von m—n liegenden Gegenpunkte mit den zugehörigen Winkeländerungen $\Delta\psi$ die Gesamthebung $AA' = y_a$ oder

$$y_a = \sum_0^a \Delta y_a = \sum_0^a \Delta\psi \cdot x = St_\psi^{0-a}.$$

Aus Fig. 35 folgt aber für die Durchbiegung des auf m—n liegenden Trägerpunktes G

$$y_g = y_a \frac{b}{l} + y_b \frac{a}{l}$$

oder mit den vorstehenden Werten

$$(58)\quad y_g = \frac{b}{l}\sum_0^a \Delta\psi \cdot x + \frac{a}{l}\sum_0^b \Delta\psi \cdot z = \frac{b}{l} St_\psi^{0-a} + \frac{a}{l} St_\psi^{0-b}.$$

Durch diesen Ausdruck ist die Biegungslinie des einfachen Fachwerkträgers festgelegt, denn der betrachtete Punkt G kann mit jedem Gurtknotenpunkt zusammenfallen. Vergleicht man Gl. (58) mit Gl. (54 b), S. 62, so zeigt sich, daß die y_g als Momente eines einfachen Trägers gefunden werden können, der mit den Einzellasten $\Delta\psi$ (Winkeländerung) belastet ist.

Die Winkeländerung $\Delta\psi = \frac{\Delta s}{h}$ (Gl. (57), S. 77) ist bei einem einfachen Träger (Fig. 35) für einen Obergurtknoten positiv und für einen Untergurtknoten negativ, aber in beiden Fällen ist die gleiche Drehung vorhanden, die eine Einsenkung des Trägers erzeugt. Nach Gl. (56), S. 69 war $\Delta s = \varepsilon s = \frac{\sigma}{E} s = \frac{S \cdot s}{EF}$; weiter gilt aber nach Teil I, S. 121 für einen Obergurtstab bzw. Untergurtknoten

$$S = -\frac{M}{h}, \text{ also } -\Delta\psi = -\frac{M \cdot s}{EFh^2} \text{ oder } \Delta\psi = +\frac{Ms}{EFh^2},$$

und entsprechend gilt für einen Untergurtstab bzw. Obergurtknoten

$$S = +\frac{M}{h}, \text{ also } +\Delta\psi = +\frac{M \cdot s}{EFh^2} \text{ oder } \Delta\psi = +\frac{Ms}{EFh^2}.$$

Bezeichnet man ganz allgemein die Winkeländerungen $\Delta\psi$ mit ϱ und betrachtet sie als elastische Gewichte:

(59)
$$\varrho = \Delta\,\psi = \frac{M\,s}{E\,F\,h^2},$$

dann müssen diese, solange keine negativen Momente auf-

Fig. 36.

treten (Auslegerträger), immer positiv sein. Setzt man ϱ in Gl. (58) ein, so folgt

(58a)
$$y_g = \frac{b}{l}\sum_0^a \varrho\,x + \frac{a}{l}\sum_0^b \varrho\,z = M_\varrho\,.$$

Ein Vergleich dieser Gleichung mit Gl. (54) zeigt, daß die Winkeländerungen des Fachwerkträgers $\varrho = \dfrac{M\,s}{E\,F\,h^2}$ den Winkeländerungen des Vollwandträgers $w = \dfrac{M\,\Delta x}{E\,J}$ entsprechen, mithin kann auch die Biegungslinie des Fachwerkträgers gemäß § 14, S. 65 als Seileck zu den elastischen Gewichten ϱ mit der Polweite $H = 1$ gezeichnet werden, wie Fig. 36 zeigt (vgl. Fig. 29, S. 67).

Wird dabei der Träger im Maßstab $1 : n$ gezeichnet, so muß, wenn die Durchbiegungen in natürlicher Größe erscheinen sollen, $H = \dfrac{1}{n}$ werden; sind aber die Durchbiegungen m-fach vergrößert

darzustellen, so ist $H = \frac{1}{n \cdot m}$ zu nehmen (vgl. S. 68). Ist E für alle Stäbe gleich, so können die $\varrho = \frac{M s}{F h^2}$ genommen werden und dazu gehört $H = \frac{E}{n \cdot m}$; für Flußeisen z. B. $H = \frac{21\,000\,000 \text{ t/m}^2}{n \cdot m}$.

Die elastischen Gewichte sind unbenannte Zahlen, wie sich leicht aus ihrer Dimension ergibt, $\varrho = \frac{M s}{E F h^2} = \frac{\text{m t} \cdot \text{m}}{\text{t/m}^2 \cdot \text{m}^2 \cdot \text{m}^2} = 1$; mithin können sie mit ihrer Polweite in jedem passenden Maßstab aufgetragen werden.

Wird insbesondere die Biegungslinie des belasteten Gurtes gesucht, so sind die entsprechenden Knotenpunkte jeweils durch eine Gerade zu verbinden (gestrichelte Linie in Fig. 36). Vgl. hierzu die Momentenfläche bei mittelbarer Belastung I. Teil, § 24, 4, Fig. 67.

b) Sind auch die Längenänderungen der Wandstäbe zu berücksichtigen, so geschieht dies auf Grund der Winkeländerungen eines elastischen Dreiecks. Werden für alle am Knoten K eines Fachwerks (Fig. 37) liegenden Winkel ψ_1, ψ_2 und ψ_3, die sich mit dem Randwinkel W zu 360° ergänzen, die Winkeländerungen $\Delta\psi_1$, $\Delta\psi_2$ und $\Delta\psi_3$ berechnet, so ist auch ΔW bekannt, denn es muß $\Delta W + \Sigma \Delta\psi = 0$ sein. Führt man diese Berechnung für alle Knoten eines Gurtes aus und betrachtet die Randwinkeländerungen ΔW als in den Knoten wirkende elastische Gewichte, so kann dazu mit der Polweite H = 1 ein Seileck gezeichnet werden, das die Biegungslinie des betreffenden Gurtes darstellt. Weiteres über dieses Verfahren siehe in den größeren Werken von Müller-Breslau, Mehrtens u. a.

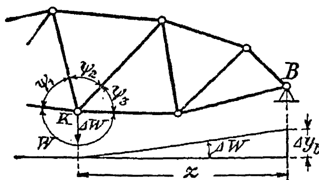


Fig. 37.

§ 18. Das Prinzip der virtuellen Verschiebungen.

Dies wird mit Vorteil angewendet, wenn es sich darum handelt, die Verschiebung irgend eines Fachwerkknotenpunktes zu ermitteln.

Für den Fachwerkträger AB (Fig. 38) soll die Verschiebung δ_c des Knotenpunktes C in Richtung m—n ermittelt werden, wenn eine gewisse äußere Belastung auf den Träger einwirkt.

Zu diesem Zwecke denkt man sich den Träger zunächst unbelastet, bringt aber im Knoten C eine in die Richtung m—n fallende (gedachte) Kraft P = 1 an, die in den Fachwerkstäben gewisse Spannkräfte $\mathfrak{S}$ erzeugt, die mit Hilfe eines Cremonaschen Kräfteplanes (vgl. I. Teil, § 29) leicht ermittelt werden können. Nimmt man nun an, daß ein beliebiger Fachwerkstab DE eine Vorrichtung erhält, die eine sehr geringe Längenänderung Δs des Stabes gestattet, solange P = 1 wirksam ist, dann muß der ganze Träger eine Bewegung ausführen, wobei der Knoten C die Verschiebung CC′ erleidet. Projiziert man CC′ auf die Richtung m—n, so ergibt sich der Wert δ_c, der die Verschiebung des Knotens C darstellt. Hierbei hat sich die gedachte Kraft P = 1 um δ_c vorwärts bewegt und eine gedachte (virtuelle) äußere Arbeit $A_ä = 1 \cdot \delta_c$ geleistet. Gleichzeitig hat auch der Stab DE mit der Spannkraft $\mathfrak{S}$ und der Längenänderung Δs eine gedachte innere Arbeit $A_i = \mathfrak{S} \cdot \Delta s$ geleistet. Da aber an einem im Gleichgewicht befindlichen Körper die Arbeitssumme gleich Null sein muß, so folgt $A_ä = A_i$ oder

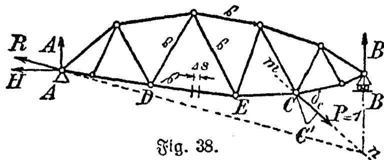


Fig. 38.

$$1 \cdot \delta_c = \mathfrak{S} \Delta s.$$

Erfahren alle Fachwerkstäbe gewisse Längenänderungen Δs, so folgt

$$1 \cdot \delta_c = \Sigma \mathfrak{s} \Delta s.$$

Bringt man nun die äußere Belastung auf den Träger, so erfahren die einzelnen Stäbe die Spannkräfte S, die die wirklichen Stablängenänderungen $\Delta s = \frac{S \cdot s}{EF}$ erzeugen [vgl. Gl. (56), S. 69]. Werden diese mit den Spannkräften $\mathfrak{s}$, die die in C wirkende Kraft P = 1 hervorbringt, verbunden, so folgt für die Verschiebung des Knotens C

$$1 \cdot \delta_c = \Sigma \mathfrak{s} \cdot \frac{S s}{EF}. \qquad (60)$$

Für gleichbleibendes E wird

$$1 \cdot \delta_c = \frac{1}{E} \Sigma \mathfrak{s} \frac{S s}{F}. \qquad (60\ a)$$

Die Berechnung der Summe in diesem Ausdruck erfolgt mittels Tabelle, wobei aber die $\mathfrak{s}$ und S jeweils mit ihren Vorzeichen einzusetzen sind.

Stab	Stablänge s in cm	Querschnitt F in qcm	Spannkraft $\mathfrak{s}$ in kg	Spannkraft S in kg	$\mathfrak{s} \cdot \frac{S s}{F}$
					.
					.
					.
					.
					$\Sigma \mathfrak{s} \frac{S s}{F}$

VII. Abschnitt.

Die durchgehenden (kontinuierlichen) vollwandigen Träger.

§ 19. Allgemeine Betrachtungen.

Jeder auf r Stützen ruhende, ununterbrochen durchgehende Träger (vgl. I. Abschnitt, § 1) ist (r — 2)-fach statisch unbestimmt, d. h. die den überzähligen Stützen entsprechenden statischen Größen sind nicht mehr mit den einfachen Hilfsmitteln der Statik bestimmbar. Um diese sog. statisch unbestimmten Größen zu finden, muß das elastische Verhalten derartiger Träger (Durchbiegungen) auf Grund gewisser Annahmen (z. B. gleich hoher Stützen) untersucht werden. Bei durchgehenden Trägern ist es zweckmäßig, die Stützenmomente (vgl. S. 11) als statisch unbestimmte Größen zu wählen. Diese verlaufen wie beim Gerberträger geradlinig von Stütze zu Stütze (vgl. Fig. 2, S. 11) und werden entsprechend der fortlaufenden Stützenzahl mit M_0, M_1, $M_2 \ldots M_{r-1}$, M_r, M_{r+1} usw. bezeichnet.

§ 20. Rechnerisch-zeichnerische Bestimmung der Stützen- und Feldmomente für ruhende Belastung.

a) Ermittelung der Stützenmomente.

Wird ein durchgehender Träger über jeder Stütze durchschnitten gedacht, so zerfällt er in eine der Summe der Trägerfelder entsprechende Anzahl einfacher, statisch bestimmter Träger, die an beliebiger Stelle x das Moment $\mathfrak{M}_x$ besitzen. Dieses durch die anstoßenden Stützenmomente beeinflußte Moment wird nach Fig. 39

(61) $$M_x = \mathfrak{M}_x + M_{r-1} \cdot \frac{l_r - x}{l_r} + M_r \cdot \frac{x}{l_r}.$$

In diese Gleichung sind die Momente mit ihrem Vorzeichen einzusetzen. Nimmt man nun ein über zwei benachbarte Öffnungen reichendes Trägerstück, das mit seiner Momentenfläche belastet ist (Fig. 40 a), hält es auf der Mittelstütze fest und macht die Außenstützen in lotrechtem Sinn beweglich, dann können sich die beiden Trägerenden frei durchbiegen wie beim einseitig eingespannten Träger (vgl. Fig. 23, S. 59). Besitzt die elastische Linie (Biegungslinie) des Trägerstücks über der Mittelstütze eine unter α geneigte Tangente, so gilt in bezug auf diese für die Durchbiegungen der Trägerenden nach § 13, Gl. (49) bzw. (49 a) S. 58

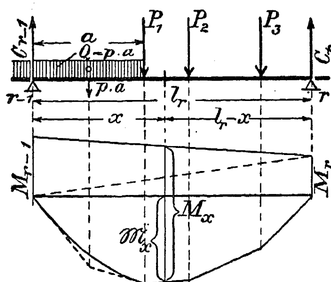


Fig. 39.

$$y = \sum_0^1 \frac{M \Delta x}{EJ} \cdot x = St_r^{0-1},$$

wobei St_r^{0-1} das statische Moment der gesamten durch EJ reduzierten Momentenfläche in bezug auf das freie Trägerende bedeutet. Hier sollen nur über je eine Öffnung, also auf Feldlänge gleichbleibende Trägheitsmomente vorkommen, mithin wird

$$y = \frac{1}{EJ} \cdot St^{0-1} = \frac{1}{EJ} [St^{0-1} + \mathfrak{S}t^{0-1}],$$

wenn **St** das statische Moment der Stützenmomentenfläche und $\mathfrak{S}t = F_{\mathfrak{M}} \cdot \xi$ das statische Moment der von den äußeren Kräften herrührenden, einfachen Momentenfläche bedeutet. (Alles, was sich auf die statisch bestimmt gedachten Teile bezieht, ist durch deutsche Buchstaben gegeben.) An Stelle der linksliegenden Stütze wird die Durchbiegung (Fig. 40 b) mit St' und $\mathfrak{S}t' = F'_{\mathfrak{M}} \cdot \xi'$

$$y_{r-1} = \frac{1}{EJ_r} \sum_{r-1}^{r} M \Delta x \cdot x = \frac{1}{EJ_r} (St'_r + \mathfrak{S}t'_r)$$

und an Stelle der rechtsliegenden Stütze mit St'' und $\mathfrak{S}t'' = F''_{\mathfrak{M}} \cdot \xi''$

$$y_{r+1} = \frac{1}{EJ_{r+1}} \sum_{r+1}^{r} M \Delta z \cdot z = \frac{1}{EJ_{r+1}} (St''_{r+1} + \mathfrak{S}t''_{r+1}).$$

Haben die drei Auflagerpunkte der elastischen Linie in bezug auf eine beliebige Wagerechte (Fig. 40b) die Ordinaten δ_{r-1}, δ_r und δ_{r+1}, so gilt

$$\delta_r - \delta_{r-1} = y_{r-1} + l_r \operatorname{tg} \alpha \quad \text{und} \quad \delta_r - \delta_{r+1} = y_{r+1} - l_{r+1} \cdot \operatorname{tg} \alpha$$

oder

$$\operatorname{tg} \alpha = -\frac{y_{r-1}}{l_r} + \frac{\delta_r - \delta_{r-1}}{l_r} \quad \text{bzw.} \quad \operatorname{tg} \alpha = +\frac{y_{r+1}}{l_{r+1}} - \frac{\delta_r - \delta_{r+1}}{l_{r+1}}.$$

Hieraus folgt schließlich die Gleichung der elastischen Linie

$$\frac{y_{r-1}}{l_r} + \frac{y_{r+1}}{l_{r+1}} = \frac{\delta_r - \delta_{r-1}}{l_r} + \frac{\delta_r - \delta_{r+1}}{l_{r+1}}$$

oder

$$\frac{y_{r-1}}{l_r} + \frac{y_{r+1}}{l_{r+1}} = \operatorname{tg} \gamma_r = \gamma_r, \tag{62}$$

wobei die auf der rechten Seite angewendete Abkürzung γ_r die in Fig. 40 c angegebene Bedeutung hat (Außenwinkel).

Setzt man schließlich die obigen Werte für die Durchbiegungen ein, so folgt

$$\frac{1}{EJ_r l_r}(S t_r' + \mathfrak{S} t_r') + \frac{1}{EJ_{r+1} l_{r+1}}(S t_{r+1}'' + \mathfrak{S} t_{r+1}'') = \gamma_r.$$

Nach Fig. 40a wird aber

$$S t_r' = \frac{M_{r-1} l_r}{2} \cdot \frac{l_r}{3} + \frac{M_r l_r}{2} \cdot \frac{2}{3} l_r$$

und

$$S t_{r+1}'' = \frac{M_{r+1} l_{r+1}}{2} \cdot \frac{l_{r+1}}{3} + \frac{M_r \cdot l_{r+1}}{2} \cdot \frac{2}{3} l_{r+1}.$$

Mit diesen Werten erhält man schließlich

$$\left\{ \begin{aligned} & M_{r-1} \cdot \frac{l_r}{J_r} + 2 M_r \left(\frac{l_r}{J_r} + \frac{l_{r+1}}{J_{r+1}} \right) + M_{r+1} \frac{l_{r+1}}{J_{r+1}} \\ & = -\frac{6}{l_r J_r} \mathfrak{S} t_r' - \frac{6}{l_{r+1} J_{r+1}} \mathfrak{S} t_{r+1}'' + 6 E \gamma_r. \end{aligned} \right. \tag{63}$$

Dies ist die sogenannte Dreimomentengleichung, die für ein überall gleiches Trägheitsmoment übergeht in

$$\left\{ \begin{aligned} & M_{r-1} l_r + 2 M_r (l_r + l_{r+1}) + M_{r+1} l_{r+1} \\ & = -\frac{6 \mathfrak{S} t_r'}{l_r} - \frac{6 \mathfrak{S} t_{r+1}''}{l_{r+1}} + 6 E J \gamma_r. \end{aligned} \right. \tag{64}$$

Das letzte Glied der Gl. (63) und (64) hängt von der gegenseitigen Höhenlage der Stützen ab; liegen diese alle in gleicher Höhe, so wird es zu Null.

Ist ein durchgehender Träger mit n Feldern, also mit n + 1 Stützen zu berechnen, so sind n — 1 unbekannte Stützenmomente zu bestimmen. Die hierzu erforderlichen Gleichungen ergeben sich, indem man die Gl. (63) bzw. (64) zunächst auf das erste und zweite Feld anwendet, also r = 1 setzt, sodann auf das zweite und dritte Feld, also r = 2 setzt, und so fort bis zu den beiden letzten Feldern, also bis r = n — 1. Hierdurch sind aber zunächst nur die Momente über den Mittelstützen festgelegt und es bleiben noch die Momente über den Endstützen 0 und **n** zu ermitteln.

Fig. 40.

Liegt der Träger an den Enden frei auf, so wird $M_0 = M_n = 0$; sind die Trägerenden frei ausgekragt, so gilt $M_0 = \mathfrak{M}_0$ und $M_n = \mathfrak{M}_n$, wobei $\mathfrak{M}_0$ und $\mathfrak{M}_n$ die Momente einfacher Kragträger (vgl. I. Teil, § 26) bedeuten. Ist jedoch der Träger beiderseits fest eingespannt, so werden zwei besondere Gleichungen notwendig, die sich ergeben, wenn man die Einspannung als eine erste bzw. letzte Öffnung mit einem unendlich großen J ansieht, so daß $\frac{1}{J} = 0$ wird. Mit Bezug auf Fig. 41 folgt aus Gl. (63) für r = 0 (linke Einspannung):

$$M_{0-1} \cdot 0 + 2 M_0 \left(0 + \frac{l_1}{J_1}\right) + M_1 \frac{l_1}{J_1} = - \frac{6 \mathfrak{S} t_1''}{l_1 J_1} + 6 E \gamma_0$$

oder

$$(65\,a) \qquad 2 M_0 l_1 + M_1 l_1 = - \frac{6 \mathfrak{S} t_1''}{l_1} + 6 E J_1 \gamma_0 .$$

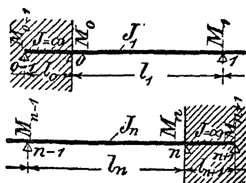


Fig. 41.

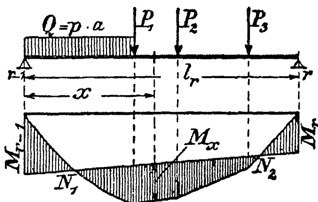


Fig. 42.

Ebenso wird für r = n (rechte Einspannung)

(65 b) $$M_{n-1} l_n + 2 M_n l_n = -\frac{6 \mathfrak{S} t_n'}{l_n} + 6 E J_n \gamma_n .$$

Die beiden letzten Formeln gelten auch, wenn nur eine einzige Öffnung vorhanden ist, man erhält dann daraus die **Einspannmomente** des **beiderseits eingespannten Trägers**. Hierbei bedeuten γ_0 und γ_n etwaige kleine Winkeländerungen an den Einspannstellen.

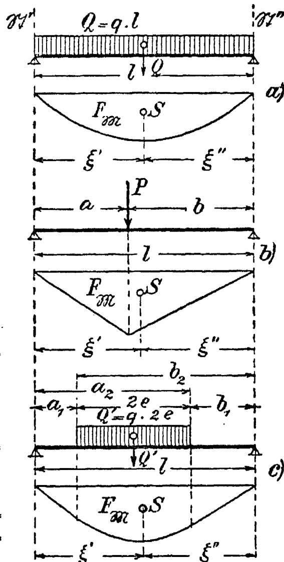


Fig. 43.

b) Ermittelung der Feldmomente.

Die Stützenmomente fallen in der Regel negativ aus. Wird ihre Momentenfläche von der im allgemeinen immer positiven Fläche ($F_{\mathfrak{M}}$) der Feldmomente $\mathfrak{M}$, die einem **einfachen**, auf 2 benachbarten Stützen ruhenden Träger zugehören, abgezogen, so bleibt die Fläche der **wirklichen Feldmomente** M übrig, die in Fig. 42 schraffiert ist. Dabei ergeben sich die beiden Nullpunkte N_1 und N_2 (vgl. auch Fig. 2, S. 11).

Für die **einfachen Belastungsfälle** können die Werte $\mathfrak{S}t$ leicht ermittelt werden.

Bei dem **gleichmäßig** mit

$Q = q \cdot l$ belasteten Träger wird nach Fig. 43 a

(66 a) $$\mathfrak{St}' = \mathfrak{St}'' = F_{\mathfrak{M}} \cdot \xi' = F_{\mathfrak{M}} \cdot \xi'' = \frac{q l^4}{24}.$$

Für den mit einer Einzellast P belasteten Träger gilt nach Fig. 43 b

(66 b) $$\begin{cases} \mathfrak{St}' = \dfrac{P a (l^2 - a^2)}{6}, \\ \mathfrak{St}'' = \dfrac{P b (l^2 - b^2)}{6}. \end{cases}$$

Sind mehrere Einzellasten vorhanden, so wird

(66 c) $$\begin{cases} \mathfrak{St}' = \displaystyle\sum_0^l \frac{P a (l^2 - a^2)}{6}, \\ \mathfrak{St}'' = \displaystyle\sum_l^0 \frac{P b (l^2 - b^2)}{6}. \end{cases}$$

Für den mit einer gleichmäßigen Streckenlast $Q' = q \cdot 2e$ belasteten Träger wird nach Fig. 43 c

(66 d) $$\begin{cases} \mathfrak{St}' = \dfrac{q \cdot e \cdot a}{3}(l^2 - a^2 - e^2) = \dfrac{q}{24}(a_2^2 - a_1^2)(2l^2 - a_1^2 - a_2^2), \\ \mathfrak{St}'' = \dfrac{q \cdot e \cdot b}{3}(l^2 - b^2 - e^2) = \dfrac{q}{24}(b_2^2 - b_1^2)(2l^2 - b_1^2 - b_2^2). \end{cases}$$

Für ein unbelastetes Feld wird $\mathfrak{St}' = \mathfrak{St}'' = 0$.

§ 21. Rechnerisch-zeichnerische Bestimmung der Querkräfte und Auflagerdrücke.

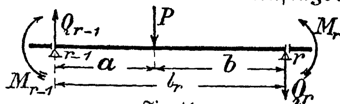


Fig. 44.

Schneidet man aus einem durchgehenden Träger ein zwischen zwei benachbarten Stützen gelegenes Stück aus und bringt an den Enden die Stützenmomente und Querkräfte an, so gilt nach Fig. 44

$$M_{r-1} + Q_{r-1} \cdot l_r - \sum_0^{l_r} P b - M_r = 0,$$

$$Q_{r-1} = \frac{\sum_0^{l_r} P \cdot b}{l_r} + \frac{M_r - M_{r-1}}{l_r}.$$

Es ist aber $\frac{1}{l_r}\sum_0^{l_r} P \cdot b = \mathfrak{A}_r$ der Auflagerdruck eines einfachen Trägers von der Länge l_r, also wird die Querkraft

(67a) $$Q_{r-1} = \mathfrak{A}_r + \frac{M_r - M_{r-1}}{l_r}.$$

In derselben Weise erhält man auch die Querkraft

(67b) $$Q_r = -\mathfrak{B}_r + \frac{M_r - M_{r-1}}{l_r}.$$

Für den beliebigen Querschnitt bei **x** wird (Fig. 45)

$$Q_x = Q_{r-1} - \sum_0^x P = \mathfrak{A}_r + \frac{M_r - M_{r-1}}{l_r} - \sum_0^x P.$$

Nun ist aber $\mathfrak{A}_r - \sum_0^x P = \mathfrak{Q}_x$ die Querkraft eines einfachen Trägers von der Länge l_r, mithin wird die gesuchte Querkraft

(68) $$Q_x = \mathfrak{Q}_x + \frac{M_r - M_{r-1}}{l_r}.$$

Hiernach können die Querkräfte eines durchgehenden Trägers in einfacher Weise dargestellt werden (Fig. 45). Man zeichnet zunächst für jedes Feld die Querkraftsfläche eines einfachen Trägers (vgl. I. Teil, § 24, 1 b) und addiert dazu den auf Feldlänge gleichbleibenden Wert $\frac{M_r - M_{r-1}}{l_r}$.

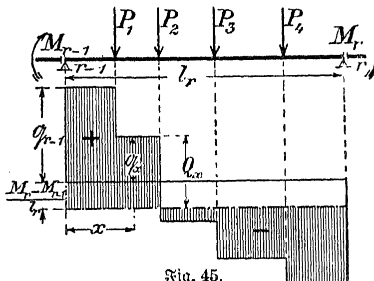


Fig. 45.

Für den Druck auf die Stütze **r** folgt aus Fig. 46

$$C_r = Q'_{r+1} - Q''_r.$$

Hieraus wird mit Rücksicht auf die Gl. (67)

(69) $$C_r = \mathfrak{A}_{r+1} + \mathfrak{B}_r + \frac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}} - \frac{M_r - M_{r-1}}{l_r}.$$

Da aber $\mathfrak{A}_{r+1} + \mathfrak{B}_r = \mathfrak{C}_r$ den Auflagerdruck von zwei einfachen,

auf der Stütze r ruhenden Trägern darstellt, so wird

$$(70)\quad \begin{cases} C_r = \mathfrak{C}_r + \dfrac{M_{r+1} - M_r}{l_{r+1}} - \dfrac{M_r - M_{r-1}}{l_r}, \\ C_r = \mathfrak{C}_r + \dfrac{M_{r-1}}{l_r} - M_r\left(\dfrac{1}{l_r} + \dfrac{1}{l_{r+1}}\right) + \dfrac{M_{r+1}}{l_{r+1}}. \end{cases}$$

Für die Endstütze folgt hieraus bei freier Auflagerung

$$(70\,a)\qquad C_0 = \mathfrak{C}_0 - \frac{M_1}{l_1}.$$

Die Werte C_r können auch sofort der Querkraftsfläche entnommen werden (Fig. 46).

Beispiel 3. Für den in Fig. 47 dargestellten durchgehenden Träger sind die Momente, Querkräfte und Auflagerdrücke zu ermitteln. Der Träger besitzt ein überall gleiches J, gleich hoch liegende Stützen ($\gamma_r = 0$) und freibeweglich gelagerte Enden.

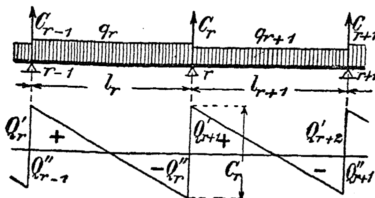


Fig. 46.

Zunächst sind für die einfachen, je auf zwei Nachbarstützen ruhenden Träger mit Hilfe von Kraft- und Seileck die Momentenflächen graphisch zu ermitteln (vgl. hierzu Fig. 3, S. 13 und Fig. 4, S. 15), und für diese Momentenflächen (Fig. 47) sind ferner die statischen Momente in bezug auf die benachbarten Stützen zu bestimmen.

Aus Fig. 47 folgt für Feld I nach Gl. (66a)

$$\mathfrak{S}t' = \mathfrak{S}t'' = \frac{q l^4}{24} = \frac{2400 \cdot 4^4}{24} = 25\,600 \text{ kgm}^3.$$

Für Feld II wird nach Gl. (66b)

$$\mathfrak{S}t' = \frac{P a(l^2 - a^2)}{6} = \frac{6800 \cdot 2{,}0(5{,}0^2 - 2{,}0^2)}{6} = 47\,600 \text{ kgm}^3.$$

$$\mathfrak{S}t'' = \frac{P b(l^2 - b^2)}{6} = \frac{6800 \cdot 3{,}0(5{,}0^2 - 3{,}0^2)}{6} = 54\,400 \text{ kgm}^3.$$

Für Feld III folgt nach Gl. (66 d)

$$\mathfrak{S}t' = \frac{q}{24}(a_2^2 - a_1^2)(2l^2 - a_1^2 - a_2^2)$$

$$= \frac{3000}{24}(5{,}0^2 - 2{,}0^2)(2 \cdot 6{,}0^2 - 2{,}0^2 - 5{,}0^2),$$

$$\mathfrak{S}t' = \frac{3000}{24} 21 \cdot 43 = 112\,875 \text{ kgm}^3,$$

$$\mathfrak{S}t'' = \frac{q}{24}(b_2^2 - b_1^2)(2l^2 - b_1^2 - b_2^2)$$

$$= \frac{3000}{24}(4{,}0^2 - 1{,}0^2)(2 \cdot 6{,}0^2 - 1{,}0^2 - 4{,}0^2),$$

$$\mathfrak{S}t'' = \frac{3000}{24} \cdot 15 \cdot 55 = 103\,125 \text{ kgm}^3$$

Feld IV besitzt keine Last, erhält aber negative Momente durch die Last auf dem Kragarm. Das Moment über der letzten Stütze beträgt nach Fig. 47

$$\mathfrak{M}_4 = M_4 = -P \cdot a = -4000 \cdot 1{,}5 = -6000 \text{ kgm},$$

folglich betragen die statischen Momente der Momentenfläche über Feld IV:

$$\mathfrak{S}t' = \frac{M_4 l_4}{2} \cdot \frac{2}{3} l_4 = -\frac{6000 \cdot 4{,}0^2}{3} = -32\,000 \text{ kgm}^3$$

$$\mathfrak{S}t'' = \frac{M_4 l_4}{2} \cdot \frac{1}{3} l_4 = -\frac{6000 \cdot 4{,}0^2}{6} = -16\,000 \text{ kgm}^3.$$

Die gefundenen Werte sind nun nacheinander in Gl. (64) einzusetzen, wobei zu beachten ist, daß $M_0 = 0$ ist (freie Auflagerung) und $\gamma_r = 0$ wird.

Für das erste und zweite Feld folgt

$$M_0 \cdot 4{,}0 + 2 M_1(4{,}0 + 5{,}0) + M_2 \cdot 5{,}0 = -\frac{6 \cdot 25\,600}{4{,}0} - \frac{6 \cdot 54\,400}{5{,}0}.$$

Für das zweite und dritte Feld gilt

$$M_1 \cdot 5{,}0 + 2 M_2(5{,}0 + 6{,}0) + M_3 \cdot 6{,}0 = -\frac{6 \cdot 47\,600}{5{,}0} - \frac{6 \cdot 103\,125}{6{,}0}.$$

Für das dritte und vierte Feld folgt

$$M_2 \cdot 6{,}0 + 2 M_3(6{,}0 + 4{,}0) + M_4 \cdot 4{,}0 = -\frac{6 \cdot 112\,875}{6} - \frac{6 \cdot (-16\,000)}{4}.$$

Mit $M_0 = 0$ und $M_4 = -6000$ kgm erhält man hieraus die Gleichungen

$$18\,M_1 + 5\,M_2 = -103\,680\,,$$
$$5\,M_1 + 22\,M_2 + 6\,M_3 = -160\,245\,,$$
$$6\,M_2 + 20\,M_3 = -64\,875\,.$$

Die Auflösung der 3 Gleichungen gibt die Stützenmomente: $M_1 = -4106{,}4$ kgm, $M_2 = -5953$ kgm, $M_3 = -1457{,}9$ kgm.

Fig. 47.

Trägt man diese Momente in Fig. 47a ein, so ergeben sich die schraffierten Feldmomente.

Weiter werden mit Hilfe des Kraftecks die Querkraftsflächen der einfachen, auf je 2 Nachbarstützen ruhenden Träger ermittelt (Fig. 47 b) und hierzu gemäß (Gl. 68) die Werte $\frac{M_r - M_{r-1}}{l_r}$ berechnet.

Man erhält:

für Feld I $\frac{M_1}{l_1} = -\frac{4106,4}{4,0} = -1027 \text{ kg} = \alpha_1$,

für Feld II $\frac{M_2 - M_1}{l_2} = \frac{-5953-(-4106,4)}{5,0} = -369 \text{ kg} = \alpha_2$,

für Feld III $\frac{M_3 - M_2}{l_3} = \frac{-1457,9-(-5953)}{6,0} = +749 \text{ kg} = \alpha_3$,

für Feld IV $\frac{M_4 - M_3}{l_4} = \frac{-6000-(-1457,9)}{4,0} = -1136 \text{ kg} = \alpha_4$.

Trägt man diese Werte in Fig. 47 b ein, so entstehen die wirklichen (schraffierten) Q u e r k r ä f t e des durchgehenden Trägers.

Die A u f l a g e r d r ü c k e können gemäß Gl. (70) aus Fig. 47 b entnommen werden. Noch einfacher werden sie gefunden, wenn man die den einzelnen Feldern zugehörenden Schlußlinien in das Krafteck überträgt (vgl. § 2, Fig. 3 und 4). In Fig. 47 c sind die Auflagerdrücke nochmals besonders dargestellt.

§ 22. Graphische Bestimmung der Stützenmomente für ruhende Belastung.

a) Ermittelung der Festpunkte (nach Ritter).

1. Unveränderliches Trägheitsmoment J.

Wird irgend ein beliebiges Feld eines durchgehenden Trägers belastet, so können die entsprechenden Feld- und Stützenmomente nach § 20 berechnet werden. Für den in Fig. 48 dargestellten Träger möge hiernach die Momentenfläche gefunden worden sein. Setzt man diese Momentenfläche als Belastung auf den durchgehenden Träger, so kann damit dessen elastische Linie (Biegungslinie) nach § 14 gezeichnet werden. Da es sich hier aber nicht um die eigentliche Gestalt der elastischen Linie, sondern um die äußeren Kräfte und Momente handelt, so genügt es, die S t ü t z e n t a n g e n t e n der elastischen Linie zu kennen.

Man zerlegt deshalb die Momentenfläche (Fig. 48 a) in geeignete größere Einzelflächen, die hier, mit Ausnahme der Parabel über l_r, nur Dreiecke sind, deren Schwerpunkte jeweils um $^1/_3$ der Feldweite von den Stützen entfernt liegen, und faßt die Inhalte dieser Flächen als elastische Gewichte $W_1, W_2, \ldots$ auf. Zu diesen Gewichten zeichnet man mit der

Fig. 48.

Polweite H ein Seileck; dies ist das elastische Vieleck (Fig. 48 b), das durch die Auflagerpunkte hindurchgeht und für die elastische Linie die Stützentangenten $\overline{23}$, $\overline{56}$, $\overline{78}$ usw. liefert. Die durch die Schwerpunkte der einzelnen Dreiecksflächen gehenden Lote d_{r-1}, d_r, d_{r+1} usw. heißen Drittellinien (= Lote). Verlängert man die Seileckseiten $\overline{12}$ und $\overline{34}$, so treffen sie sich im Punkt v'_{r-1}, durch den die aus W_2 und W_3 gebildete Mittelkraft hindurchgeht. Die durch v'_{r-1} gehende Lotrechte v_{r-1} muß somit die Strecke $\overline{23}$ bzw. deren Projektion $\frac{l_{r-1}}{3} + \frac{l_r}{3}$, gemäß Teil I, §15, im umgekehrten Verhältnis von W_2 und W_3 teilen. Nun ist aber $W_2 = \frac{1}{2} M_{r-1} l_{r-1}$

und $W_3 = \frac{1}{2} M_{r-1} l_r$, somit $W_2 : W_3 = l_{r-1} : l_r$; soll daher $\overline{23}$ im umgekehrten Verhältnis von W_2 und W_3 geteilt werden, so braucht man in Fig. 48 b nur die beiden Strecken $\frac{l_{r-1}}{3}$ und $\frac{l_r}{3}$ zu vertauschen, um einen Punkt der Lotrechten v_{r-1} zu erhalten, die man als **verschränkte Drittellinie** bezeichnet.

In der gleichen Weise erhält man durch Umsetzen der neben den übrigen Stützen liegenden Feldweitendrittel die verschränkten Drittellinien v_{r+1} usw.

Die Seite $3\,v'_{r-1}$ des Dreiecks $2\,3\,v'_{r-1}$ schneidet auf der Stützenverbindungslinie QR den Punkt J_r aus, der, wie sich geometrisch (durch affine Figuren) leicht nachweisen läßt, immer die gleiche Lage behält, solange Seite $\overline{21}$ durch den festen Punkt J_{r-1} und Seite $\overline{23}$ durch den festen Punkt Q geht, während sich die Ecken des Dreiecks $2\,3\,v'_{r-1}$ auf den Lotrechten d''_{r-1}, v_{r-1} und d'_r bewegen. Der Punkt J_r heißt **Festpunkt**.

In derselben Weise erhält man auch den Festpunkt J_{r-1} usw., und durch Verlängern der Seileckseite $\overline{45}$ ergibt sich der Festpunkt K_r bzw. K_{r+1}, K_{r+2} usw.

Die Bedeutung der Festpunkte folgt aus der unbelasteten Öffnung l_{r+1} mit dem Festpunkt K_{r+1}. Verlängert man die Seileckseite $\overline{67}$ bis zu den benachbarten Stützenlotrechten, so entstehen auf diesen die Abschnitte $\overline{RR'}$ bzw. $\overline{SS'}$. Damit folgt für die statischen Momente von W_6 und W_7 (vgl. I. T., S. 35)

$$St' = W_6 \cdot \frac{l_{r+1}}{3} = H \cdot \overline{RR'} \text{ bzw. } St'' = W_7 \cdot \frac{l_{r+1}}{3} = H \cdot \overline{SS'}$$

oder $W_6 : W_7 = \overline{RR'} : \overline{SS'}$. Ferner ist (absolut genommen)

$$W_6 = \frac{M_r \cdot l_{r+1}}{2} \quad \text{und} \quad W_7 = \frac{M_{r+1} l_{r+1}}{2},$$

und es folgt

$$\frac{W_6}{W_7} = \frac{M_r}{M_{r+1}} = \frac{RR'}{SS'}.$$

Hiernach muß der Festpunkt K_{r+1} lotrecht unter dem Momentennullpunkt N_{r+1} liegen. Dasselbe läßt sich auch für den links liegenden Festpunkt J_{r-1} nachweisen. Daraus folgt:

Der Festpunkt K_{r+1} bestimmt diejenige Stelle, wo das Moment in der unbelasteten Öffnung l_{r+1} gleich Null sein muß, wie auch die **links** davon gelegenen Öffnungen belastet sein mögen. Das gleiche gilt für den Festpunkt J_{r-1} der unbelasteten Öffnung l_{r-1} in bezug auf die Belastung aller **rechts** davon gelegenen Öffnungen.

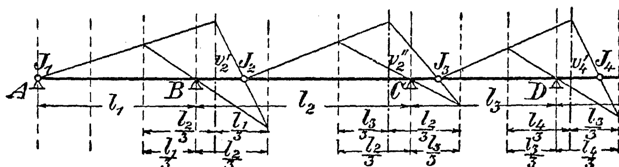


Fig. 49.

Liegen die Enden des durchgehenden Trägers frei auf, so fällt der erste Festpunkt J_1 mit dem Auflager A zusammen und sämtliche Festpunkte J können gemäß Fig. 48 sofort durch die einfache Konstruktion in Fig. 49 festgelegt werden. Wiederholt man diese Konstruktion vom rechten Ende aus, so ergeben sich sämtliche Festpunkte K.

Sind die Trägerenden fest eingespannt, so liegen die ersten Festpunkte in der Entfernung l/3 von den Einspannstellen.

2. Auf Feldlänge unveränderliches Trägheitsmoment.

In diesem Falle wird man gemäß Fig. 21, S. 56 die durch das jeweils in der fraglichen Öffnung vorhandene Trägheitsmoment J reduzierte Momentenfläche $\left(\frac{M}{J}\right)$ als Belastung auf den Träger setzen (Fig. 50). Infolge der auf Feldlänge unveränderlichen Trägheitsmomente kann die Belastungsfläche auch hier in einzelne Dreiecke zerlegt werden, durch deren Schwerpunkte die Drittellinien hindurchgehen,

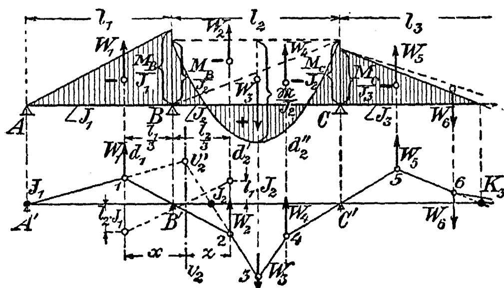


Fig. 50.

während durch die Dreieckinhalte die elastischen Gewichte W_1, W_2, W_3, ... festgelegt sind. Die verschränkte Drittellinie v_2 muß hier ebenfalls mit der Mittelkraft der beiden Gewichte W_1 und W_2 zusammenfallen, somit gilt $W_1 \cdot x = W_2 \cdot z$. Da aber $W_1 = \frac{M_B}{J_1} \cdot \frac{l_1}{2}$ und $W_2 = \frac{M_B}{J_2} \cdot \frac{l_2}{2}$ ist, so folgt

$$x : z = (l_2 J_1) : (l_1 J_2) .$$

Nach diesem Verhältnis ist die Strecke $\left(\frac{l_1}{3} + \frac{l_2}{3}\right)$ zu teilen, was am einfachsten graphisch geschieht, wie Fig. 50 zeigt (vgl. hierzu Teil I, § 15), und damit ist die verschränkte

Drittellinie v_2 festgelegt. Die weitere Konstruktion der Festpunkte erfolgt wie unter 1.

b) Bestimmung der Stützenmomente mit Hilfe der Kreuzlinien bzw. der Stützenlotrechten.

Für einen durchgehenden Träger mit einer belasteten Öffnung (Fig. 51) sei die Momentenfläche (Fig. 51a) und das derselben zugehörende elastische Vieleck $J_1\,1\,2\,3\ldots6\,7\,K_4$ bekannt. Letzteres zeigt, daß zu dem der äußeren Belastung Q entsprechenden elastischen Gewicht W_3 die Vielecksseiten $\overline{23}$ und $\overline{34}$ gehören, die entsprechend verlängert auf den benachbarten Stützenlotrechten die Strecken $\overline{B_2B_3}$ und $\overline{C_2C_3}$ abschneiden. Nun sind aber die statischen Momente der zur Last Q gehörenden einfachen Momentenfläche ($\mathfrak{M}$) in bezug auf die benachbarten Stützenlotrechten, vgl. I. Teil, S. 35,

$$St' = W_3 \cdot \frac{l_2}{2} = \overline{B_2B_3} \cdot H \quad \text{und} \quad St'' = W_3 \cdot \frac{l_2}{2} = \overline{C_2C_3} \cdot H,$$

wobei H die zu dem elastischen Vieleck gehörende Polweite bezeichnet (Fig. 54c), und daraus folgt, daß die Abschnitte $\overline{B_2B_3}$ und $\overline{C_2C_3}$ nur von der äußeren Belastung Q des einen Feldes abhängen, also von vornherein als bekannt anzusehen sind. Die zu diesen Abschnitten gehörenden Verbindungslinien B_2C_3 und B_3C_2, die durch die Festpunkte J_2 und K_2 gehen, bezeichnet man als Kreuzlinien.

Insbesondere läßt sich nun die zu den elastischen Gewichten W gehörende Polweite H so bestimmen, daß das elastische Vieleck mit seinen an W_3 stoßenden Seiten die benachbarten Stützenmomente M_B und M_C unmittelbar auf den Stützenlotrechten abschneidet. Die zu W_3 benachbarten Gewichte sind

$$W_2 = \overline{B'B''} \cdot \frac{l_2}{2} = M_B \cdot \frac{l_2}{2} \quad \text{und} \quad W_4 = \overline{C'C''} \cdot \frac{l_2}{2} = M_C \cdot \frac{l_2}{2};$$

ihre statischen Momente in bezug auf die Stützenlotrechten betragen (absolut genommen):

$$St' = W_2 \cdot \frac{l_2}{3} = M_B \cdot \frac{l_2^2}{6} \text{ und } St'' = W_4 \cdot \frac{l_2}{3} = M_C \cdot \frac{l_2^2}{6}.$$

Aus dem elastischen Vieleck folgt aber für dieselben statischen Momente

$$St' = W_2 \cdot \frac{l_2}{3} = \overline{B_1 B_2} \cdot H \text{ und } St'' = W_4 \cdot \frac{l_2}{3} = \overline{C_1 C_2} \cdot H,$$

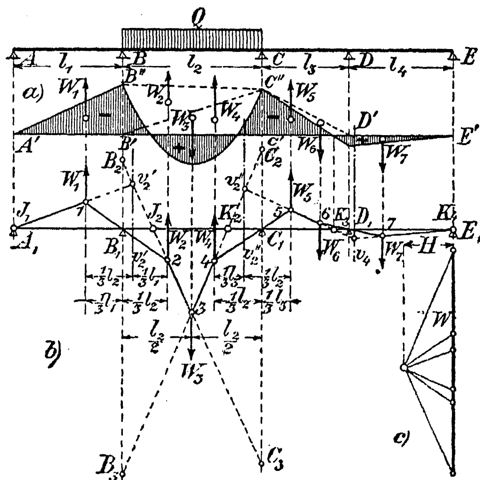


Fig. 51.

und es muß sein

$$M_B \cdot \frac{l_2^2}{6} = \overline{B_1 B_2} \cdot H \quad \text{und} \quad M_C \frac{l_2^2}{6} = \overline{C_1 C_2} \cdot H.$$

Soll also $M_B = \overline{B_1 B_2}$ und $M_C = \overline{C_1 C_2}$ werden, so ist

$H = \frac{l_2^2}{6}$ zu nehmen. Mit diesem Werte sind aber auch zugleich die Längen $\overline{B_2B_3}$ und $\overline{C_2C_3}$ festgelegt, die man kurz die Stützenlotrechten (T) nennt. Aus den auf S. 98 gegebenen Beziehungen folgt

$$(71)\quad \begin{cases} T' = \overline{B_2B_3} = \frac{\mathfrak{St}'}{H} = \frac{6\,\mathfrak{St}'}{l_2^2}, \\ T'' = \overline{C_2C_3} = \frac{\mathfrak{St}''}{H} = \frac{6\,\mathfrak{St}''}{l_2^2}; \end{cases}$$

gemäß ihrer Ableitung sind diese Werte negativ zu setzen.

Für die einfachen Belastungsfälle können hiernach die Längen der Stützenlotrechten leicht berechnet werden.

Es wird für ein gleichmäßig mit $Q = ql$ belastetes Trägerfeld (Fig. 43 a) nach Formel (66 a) $\mathfrak{St}' = \mathfrak{St}'' = \frac{ql^4}{24}$, also

$$(72\,a)\qquad T = T' = T'' = \frac{6}{l^2} \cdot \frac{ql^4}{24} = \frac{ql^2}{4} = 2\,\mathfrak{M}_m .$$

Für das mit einer Einzellast P belastete Trägerfeld (Fig. 43 b) gilt nach Formel (66 b) $\mathfrak{St}' = \frac{Pa(l^2 - a^2)}{6}$ und $\mathfrak{St}'' = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{6}$, also

$$(72\,b)\quad \begin{cases} T' = \frac{6}{l^2} \cdot \frac{Pa(l^2 - a^2)}{6} = \frac{Pa(l^2 - a^2)}{l^2}, \\ T'' = \frac{6}{l^2} \cdot \frac{Pb(l^2 - a^2)}{6} = \frac{Pb(l^2 - b^2)}{l^2}. \end{cases}$$

Für das mit einer gleichmäßigen Streckenlast $Q' = q \cdot 2e$ belastete Trägerfeld (Fig. 43 c) wird nach Formel (66 d)

$$\mathfrak{St}' = \frac{q}{24}(a_2^2 - a_1^2)(2l^2 - a_1^2 - a_2^2)$$

und

$$\mathfrak{St}'' = \frac{q}{24}(b_2^2 - b_1^2)(2l^2 - b_1^2 - b_2^2),$$

also

$$(72c)\quad \begin{cases} T' = \frac{6}{l^2} \cdot \frac{q}{24}(a_2^2 - a_1^2)(2l^2 - a_1^2 - a_2^2) \\ \quad = \frac{q}{4l^2}(a_2^2 - a_1^2)(2l^2 - a_1^2 - a_2^2), \\ T'' = \frac{6}{l^2} \cdot \frac{q}{24}(b_2^2 - b_1^2)(2l^2 - b_1^2 - b_2^2) \\ \quad = \frac{q}{4l^2}(b_2^2 - b_1^2)(2l^2 - b_1^2 - b_2^2). \end{cases}$$

Reicht insbesondere die Streckenlast bis an die linke Stütze, so wird mit $a_1 = 0$ und $a_2 = a = \nu \cdot l$ (Fig. 54)

$$(72d)\quad \begin{cases} T' = \nu^2(2 - \nu^2) \cdot \frac{ql^2}{4} = \nu^2(2 - \nu^2) \cdot T \\ T'' = \nu^2(2 - \nu)^2 \cdot \frac{ql^2}{4} = \nu^2(2 - \nu)^2 \cdot T. \end{cases}$$

Geht die Streckenlast von der rechts gelegenen Stütze aus, dann sind T' und T'' miteinander zu vertauschen.

c) Graphische Ermittelung der Stützenmomente für Träger mit durchgehends gleichem oder auf Feldlänge gleichbleibendem Trägheitsmoment.

Es wird ein durchgehender Träger betrachtet, dessen frei aufliegende Enden zugleich die äußersten Festpunkte darstellen. Bei dem Träger mit eingespannten Enden liegen diese Punkte im Drittel der anstoßenden Feldweite; die folgende Konstruktion bleibt aber in beiden Fällen gleich.

1. Gleichmäßig verteilte Belastung auf Feldlänge.

Für das belastete Feld (Fig. 52a) konstruiert man zunächst die Momentenparabel der $\mathfrak{M}$, deren Pfeilhöhe $S_1S = \mathfrak{M}_m = \frac{ql_2^2}{8}$ ist, trägt die Stützenlotrechten $B_1B_2 = C_1C_2 = T = \frac{ql_2^2}{4} = 2\mathfrak{M}_m$ auf und zieht die Kreuzlinien B_1C_2 bzw.

B_2C_1, die durch den Parabelscheitel S gehen müssen. Nunmehr bestimmt man die Festpunkte des ganzen Trägers (vgl. Fig. 49) und errichtet in den Festpunkten J_2 und K_2 des belasteten Feldes Lote, die auf den Kreuzlinien die Punkte J′ und K′ festlegen, deren Verbindungslinie J′K′ gemäß

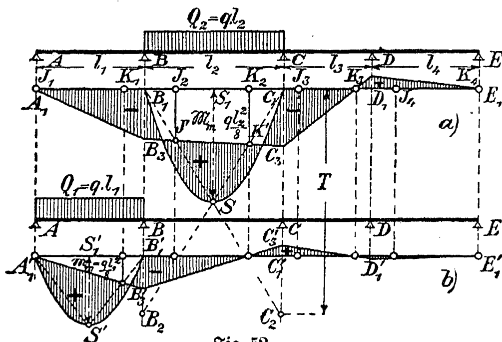


Fig. 52.

Fig. 51 auf den Stützensenkrechten die Stützenmomente abschneidet; es ist $B_1B_3 = M_B$ und $C_1C_3 = M_C$. Der weitere Verlauf der Momentenlinie ist durch die übrigen Festpunkte bestimmt. Im vorliegenden Falle genügt der Parabelscheitel S zum Festlegen der Kreuzlinien.

Für die Endfelder kommt nur je **ein** Festpunkt in Frage (Fig. 51b).

2. Einzellast P auf einem Trägerfeld.

Für das belastete Feld (Fig. 53) erhält man hier als Momentenfläche der $\mathfrak{M}$ ein Dreieck, dessen Höhe unter der Last P liegt und den Wert $G_1G = \mathfrak{M}_m = \frac{P\,a\,b}{l_2}$ besitzt. Bei veränderlicher Stellung der Last stellt G_1G die Ordinaten einer Parabel dar, deren Scheitelordinate gleich

$\frac{P l_2}{4} = \mathfrak{M}_m$ ist, so daß diese Parabel B_1GC_1 von vornherein gezeichnet werden kann. Für die Stützenlotrechten folgt aus Gl. (72b) S. 100:

$$(73)\quad \begin{cases} T' = \dfrac{Pa(l^2 - a^2)}{l^2} = \dfrac{Pa(l+a)b}{l^2} = \dfrac{Pab}{l} \cdot \dfrac{l+a}{l} \\ \quad = \mathfrak{M}_m \cdot \dfrac{l+a}{l}, \\ T'' = \dfrac{Pb(l^2 - b^2)}{l^2} = \dfrac{Pb(l+b)a}{l^2} = \dfrac{Pab}{l} \cdot \dfrac{l+b}{l} \\ \quad = \mathfrak{M}_m \cdot \dfrac{l+b}{l}. \end{cases}$$

Diese Werte lassen sich sehr einfach zeichnerisch darstellen. Man trägt von G_1 aus (Fig. 53a) die Feldlänge l_2 nach rechts

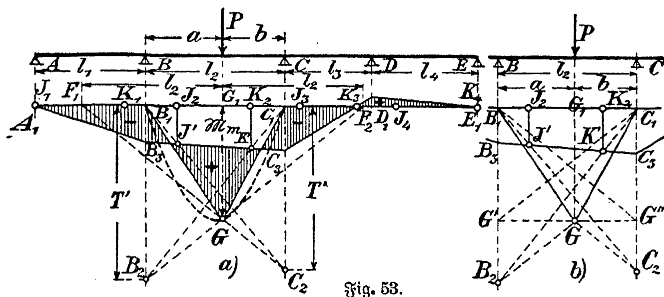


Fig. 53.

und links bis F_1 bzw. F_2 ab, dann ist $C_1F_1 = l_2 + b$ und $B_1F_2 = l_2 + a$. Die verlängerten Geraden F_1G und F_2G schneiden auf den Stützenlotrechten die Strecken B_1B_2 bzw. C_1C_2 ab, und es wird

$$B_1B_2 = G_1G \frac{l_2 + a}{l_2} \quad \text{bzw.} \quad C_1C_2 = G_1G \cdot \frac{l_2 + b}{l_2}.$$

Da aber $\overline{G_1G} = \mathfrak{M}_m$ ist, so ergibt sich $B_1B_2 = T'$ und $C_1C_2 = T''$.

Macht man $B_1G' = G_1G$ (Fig. 53b), so wird $C_1G' \parallel F_2B_2$, und es genügt $GB_2 \parallel C_1G'$ zu ziehen, um die Stützenlotrechte B_1B_2 abzuschneiden. In gleicher Weise erhält man auch C_1C_2, wie Fig. 53b zeigt.

Nachdem die Stützenlotrechten bestimmt sind, können die Kreuzlinien B_1C_2 und C_2B_1 gezogen werden, die sich mit den in den Festpunkten J_2 und K_2 errichteten Loten in den Punkten J' und K' schneiden. Die Verbindungslinie J'K' schneidet auf den Stützenlotrechten die Stützenmomente ab; es ist $\overline{B_1B_3} = M_B$ und $\overline{C_1C_3} = M_C$.

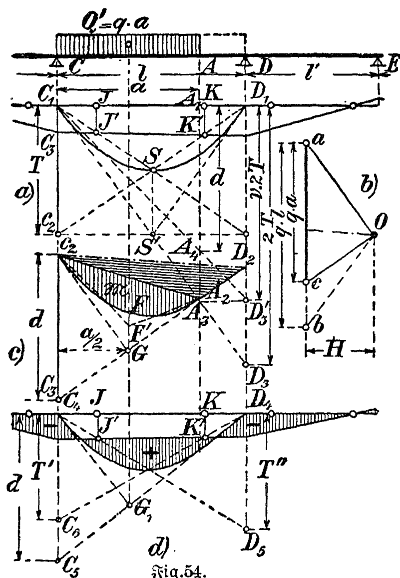


Fig. 54.

3. Gleichmäßige Streckenlast auf einem Teil eines Trägerfeldes.

Die Stützenmomente für eine Streckenlast $Q' = q \cdot a$, die von links her in das Feld hineinreicht (Fig. 54), lassen sich auf diejenigen für gleichmäßige Belastung des ganzen Feldes zurückführen. Fig. 54a zeigt zunächst die unter 1 gegebene Konstruktion der Stützenmomente bei gleichmäßiger Belastung eines Feldes mit $Q = q\ l$, zu der gleichzeitig das

Krafteck in Fig. 54b gezeichnet ist ($aO \parallel C_1S'$ und $Ob \parallel D_1S'$). Mit diesem Krafteck kann auch die Momentenfläche der M für $Q' = q \cdot a$ (Fig. 54c) gezeichnet werden, die aus einem Dreieck $C_2D_2A_2$ und einem Parabelabschnitt C_2A_2F besteht. Die Tangenten der Parabel treffen sich in G und schneiden auf der Stützenlotrechten durch C die Strecke $C_2C_3 = d$ ab. Verwandelt man den Parabelabschnitt in das inhaltsgleiche Dreieck C_2A_2F', das die gleiche Schwerpunktslotrechte hat, so können für die gesamte Momentenfläche $C_2D_2A_2F'$ die Abschnitte auf den Stützenlotrechten nach Gl. (71) S. 100 berechnet werden. Dies ist jedoch zu umständlich.

Aus den ähnlichen Dreiecken C_2C_3G (Fig. 54c) und acO (Fig. 54b) folgt $d : \frac{a}{2} = (q \cdot a) : H$ oder $d = \frac{q\,a^2}{2H}$. Entsprechend folgt für volle Belastung des Feldes aus Fig. 54a und b

$$2T : \frac{l}{2} = (q \cdot l) : H \quad \text{oder} \quad H = \frac{q\,l^2}{4T},$$

mithin wird

$$(74) \qquad d = \frac{q\,a^2}{2} \cdot \frac{4T}{q\,l^2} = 2\left(\frac{a}{l}\right)^2 T = 2\nu^2 T.$$

Wird auf der Stützenlotrechten durch D (Fig. 54a) $\overline{D_1D_3} = 2T$ gemacht, so ist C_1D_3 die Tangente an die der Vollbelastung des Feldes entsprechende Momentenparabel; wird ferner das Lot in A errichtet, so trifft es C_1D_3 im Punkt A_3, und es ist $\overline{A_1A_3} = \frac{a}{l}2T$. Überträgt man A_3 nach D_3' und zieht die Gerade $\underline{C_1D_3'}$, so wird auf der Lotrechten durch A der Wert $d = \overline{A_1A_4}$ abgeschnitten, denn es ist $a : l = d : \frac{a}{l}2T$ oder $d = 2\left(\frac{a}{l}\right)^2 T = 2\nu^2 T$, wie oben in Gl. (74).

diesen Wert als Strecke C_4C_5 (Fig. 54d) auf,
Streckenlast Q′ entsprechende Momentenfläche
hre Tangenten festgelegt und es sind nur noch
echten zu bestimmen. Diese werden nach Gl.
n auf volle Belastung mit $T = \frac{q\,l^2}{4}$, für

,25	$T' = 0{,}12109\,T$	und	$T'' = 0{,}19141\,T$
,50	$T' = 0{,}43750\,T$	„	$T'' = 0{,}56250\,T$
,75	$T' = 0{,}80859\,T$	„	$T'' = 0{,}87891\,T$
,0	$T' = 1{,}0000\;T$	„	$T'' = 1{,}0000\;T$

nan hiernach die Länge der Stützenlotrechten
n Fig. 54d ein, so sind die Kreuzlinien C_4D_5
gelegt. Die durch die Festpunkte J und K
e schneiden die Kreuzlinien in den Punkten
ren Verbindungslinie J′K′ auf den Stützen-
Stützenmomente M_C und M_D abschneidet.

hgehende Träger mit beweglicher Belastung.

irkung beweglicher Einzellasten auf durch-
er wird am vorteilhaftesten mittels Einfluß-
ht. Handelt es sich um eine bewegliche gleich-
ung, so kann auch das im § 22c3, Fig. 54, an-
ahren benutzt werden.

Einflußlinien für die Momente.

ßlinien erstrecken sich hier über die gesamte
nan ermittelt sie am einfachsten, nach § 22c2,
s Kreuzlinien, die für eine bestimmte Laststel-
hörigen Stützen- und Feldmomente festlegen.

Wird dieses W
Laststellungen
man gemäß F
radlinig begre
standslinien
einen bestimm
Zustandslinien
stellung senkre
ihre Endpunkt
Momentes
Die Anw
einem über 3
Zunächst
in Betracht g
fachen Träge
gelegt, das ab
den Laststellu
gefunden we
der in Fig. 5
Momenten M
gezeichnet, di
fällt, nur fü
strichelte Lini
Lot schneidet
punkten von
Lotrechten D
sprechenden
Strecken $\overline{B1}$
Momentenli
K_2 und K_3
öffnung II
5 Laststellung
und dazu sin

Wird dieses Verfahren in jedem Feld auf eine größere Zahl Laststellungen angewendet und P = 1 t gesetzt, so erhält man gemäß Fig. 53, S. 103 eine entsprechende Anzahl geradlinig begrenzter Vielecke, die nach Engesser als Zustandslinien bezeichnet werden. Entnimmt man nun für einen bestimmten Querschnitt x die Ordinaten sämtlicher Zustandslinien und trägt sie unter der zugehörigen Laststellung senkrecht zu einer Tragwerkslinie auf, so bildet die ihre Endpunkte verbindende Kurve die Einflußlinie des Momentes im Trägerquerschnitt x.

Die Anwendung dieses Verfahrens ist in Fig. 55 an einem über 3 Öffnungen durchgehenden Träger gezeigt.

Zunächst sind (Fig. 55a) 5 Laststellungen im Endfeld I in Betracht gezogen. Die zugehörigen Momente eines einfachen Trägers ($\mathfrak{M}$) sind mittels Kraftecks (Fig. 55b) festgelegt, das aber 5 verschiedene Pole erfordert, die durch eine den Laststellungen entsprechende Einteilung der Last P = 1 t gefunden werden; auch kann man diese Momente mittels der in Fig. 53 gezeichneten Parabel festlegen. Zu diesen Momenten $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_3$, $\mathfrak{M}_4$ und $\mathfrak{M}_5$ sind die Kreuzlinien gezeichnet, die aber, weil der Festpunkt J_1 mit A zusammenfällt, nur für die linksseitige Stütze gebraucht werden (gestrichelte Linien in Fig. 55a). Ein im Festpunkt K_1 errichtetes Lot schneidet die Kreuzlinien, und werden nach diesen Schnittpunkten von A aus Gerade gezogen, so legen sie auf der Lotrechten durch B die den einzelnen Laststellungen entsprechenden Stützenmomente M_B fest, es sind dies die Strecken $\overline{B1}$, $\overline{B2}$, $\overline{B3}$, $\overline{B4}$ und $\overline{B5}$. Der weitere Verlauf der Momentenlinien (Zustandslinien) ist durch die Festpunkte K_2 und K_3 gegeben. In der gleichen Weise ist die Mittelöffnung II (Fig. 55c) behandelt. Zunächst sind auch für 5 Laststellungen die Momente $\mathfrak{M}$ ermittelt (Krafteck Fig. 55d), und dazu sind mittels Kreuzlinien die benachbarten Stützen-

momente bestimmt (die Kreuzlinien sind der Übersichtlichkeit halber nicht eingetragen). Der weitere Verlauf der Momente ist durch die Festpunkte J_1 und K_3 gegeben. Da die beiden Endfelder gleich groß sind, so werden besondere Zustandslinien für das Endfeld III überflüssig, denn diese sind die Spiegelbilder derjenigen im Feld I.

1. Einflußlinie für das Stützenmoment über B.

Aus den vorstehend festgelegten Zustandslinien wird das Stützenmoment M_B zu jeder Laststellung entnommen und senkrecht unter dieser von einer Tragwerkslinie $A_0B_0C_0D_0$ aufgetragen (Fig. 55e). Für das Feld I wird nach Fig. 55a: $\overline{11'} = \overline{B1}$, $\overline{22'} = \overline{B2}$, $\overline{33'} = \overline{B3}$, $\overline{44'} = \overline{B4}$ und $\overline{55'} = \overline{B5}$, während für die Stellung der Last über den Stützen das Moment gleich Null sein muß. Für das Feld II folgt aus Fig. 55c: $\overline{11'} = \overline{B1}$, $\overline{22'} = \overline{B2}$, $\overline{33'} = \overline{B3}$, $\overline{44'} = \overline{B4}$ und $\overline{55'} = \overline{B5}$. Für das Feld III können, wegen der Symmetrie mit Feld I, die den Momenten über B zugehörigen Ordinaten über C entnommen werden, also ist nach Fig. 55a: $\overline{11'} = \overline{C5}$, $\overline{22'} = \overline{C4}$, $\overline{33'} = \overline{C3}$, $\overline{44'} = \overline{C2}$ und $\overline{55'} = \overline{C1}$. Diese Werte liegen in Fig. 55a über der Schlußlinie, mithin sind sie positiv.

2. Einflußlinie für das Moment M_4 im Feld I.

Für jedes Feldmoment ist die Einflußlinie ebenso zu bestimmen wie für das Stützenmoment M_B. Man findet also auch alle Ordinaten der Einflußlinie für das Moment M_4 im Feld I aus denselben Zustandslinien, und zwar direkt unter der Stelle von M_4. Bewegt sich die Last im Feld I, so sind die Ordinaten der Einflußlinie für M_4 aus Fig. 55a zu entnehmen, sie liegen alle auf der unter Punkt 4 kräftig ausgezogenen Strecke und werden jeweils von der zu den einzelnen Laststellungen gehörenden Zustandslinie abgeschnitten. Alle Ordinaten im I. Feld sind positiv, in Fig. 55f

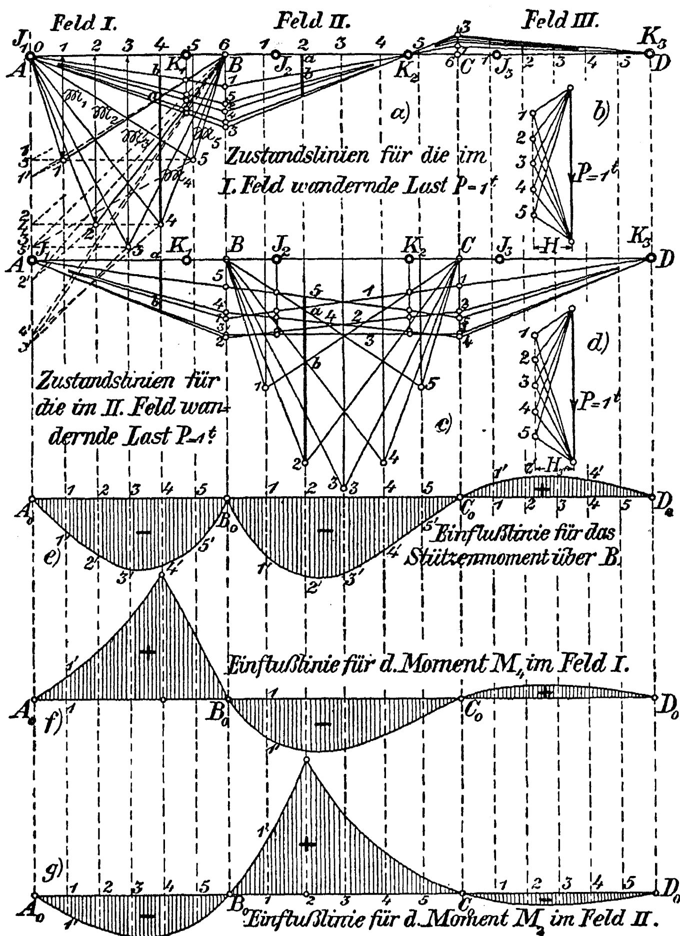

Feld I.
Feld II.
Feld III.
a)
b)
c)
d)
e)
f)
g)
Zustandslinien für die im I. Feld wandernde Last P = 1 t
Zustandslinien für die im II. Feld wandernde Last P = 1 t
P = 1 t
Einflußlinie für das Stützenmoment über B.
Einflußlinie für d. Moment M₄ im Feld I.
Einflußlinie für d. Moment M₂ im Feld II.

Fig. 55.

sind sie senkrecht zur Tragwerkslinie A_0B_0 aufgetragen; $\overline{11'} = \overline{ab}$ (Fig. 55a) usw.

Bewegt sich die Last im Feld II, so sind die Einflußordinaten aus Fig. 55c, und zwar ebenfalls im Feld I an der Stelle von M_4 zu entnehmen, ihre Gesamtheit ist durch die unter Punkt 4 kräftig ausgezogene Strecke dargestellt. Die den einzelnen Laststellungen im Feld II entsprechenden Strecken werden von der jeweils zugehörigen Zustandslinie abgeschnitten, in Fig. 55f sind sie senkrecht zur Tragwerkslinie B_0C_0 aufgetragen; $\overline{11'} = \overline{ab}$ (Fig. 55c) usw.

Wandert die Einzellast im Feld III, so bringt sie im Feld I an der Stelle von M_4 (Punkt 4) genau dieselbe Wirkung hervor wie eine im Feld I wandernde Last an der zum Punkt 4 symmetrisch gelegenen Stelle (Punkt 2) des Feldes III. Mithin sind für Feld III keine besonderen Zustandslinien nötig, die Einflußordinaten für M_4 im Feld I sind für alle Laststellungen im III. Feld durch die über Punkt 2 im Feld III stark ausgezogene Strecke dargestellt. Die den einzelnen Laststellungen im Feld I zugehörenden Ordinaten sind also aus den entsprechenden Zustandslinien an der Stelle 2 im Feld III entnommen und symmetrisch zu diesen Stellungen unter Feld III senkrecht zur Tragwerkslinie C_0D_0 (Fig. 55f) aufgetragen. Diese Ordinaten sind alle positiv.

3. Einflußlinie für das Moment M_2 im Feld II.

Diese ist in Fig. 55g dargestellt und wird wie vorstehend aufgetragen.

4. Ungünstigste Laststellungen und Größtmomente.

Aus Fig. 55 folgt, daß die Einflußlinien für die Feldmomente innerhalb der betrachteten Öffnung immer positiv sind, während sie außerhalb derselben abwechselnd positiv und negativ sind, solange der in Frage kommende Schnitt

zwischen den Festpunkten liegt. Fällt jedoch der fragliche Querschnitt zwischen Stütze und Festpunkt (Fig. 56), dann wird die Einflußlinie auch innerhalb des in Betracht kommenden Feldes positiv und negativ, so daß eine Lastscheide S entsteht. Daraus folgt:

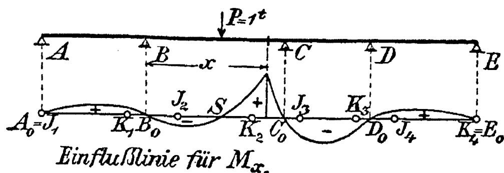


Fig. 56.

Das größte positive Moment in einem Schnitt innerhalb der Festpunkte entsteht, wenn die betreffende Öffnung voll belastet und die übrigen Öffnungen abwechselnd unbelastet und belastet sind. Die Ergänzungsbelastung liefert das größte negative Moment.

Liegt der Schnitt zwischen einer Stütze und einem Festpunkt, so entsteht das größte positive Moment, wenn nur die Strecke zwischen der Lastscheide S und der benachbarten Stütze voll belastet ist, während die übrigen Öffnungen abwechselnd unbelastet und belastet sind.

b) Einflußlinien für die Auflagerdrücke und Querkräfte.

Auch diese Einflußlinien erstrecken sich über die ganze Trägerlänge und können ebenfalls durch die Zustandslinien gefunden werden. Fig. 57a zeigt eine aus Fig. 55a entnommene Zustandslinie, die ein geschlossenes Seileck darstellt, an dessen Ecken die äußere Kraft und die Stützendrücke angreifen, die miteinander im Gleichgewicht sein müssen. Zieht man in Fig. 57b zu den einzelnen Seiten

des Seilecks in Fig. 57a Parallelen, so schneiden diese aus der äußeren Last die einzelnen Stützendrücke ab, die ihrerseits ein geschlossenes Krafteck bilden, weil sie im Gleichgewicht sind (vgl. Teil I, § 7). Der Auflagerdruck B ist jedoch aus 2 Teilen zusammenzusetzen, was einer schnellen Darstellung sehr hinderlich ist. Dieser Nachteil verschwindet, sobald man der Zustandslinie einen wagerechten Schluß-

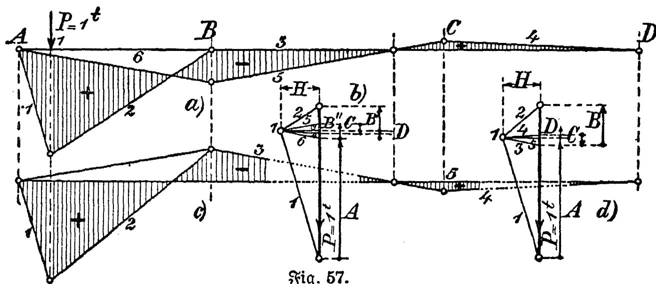


Fig. 57.

linienzug gibt (Fig. 57c); denn dann folgen sich direkt die Auflagerdrücke in fortlaufender Reihe, wie Fig. 57d zeigt. Entsprechend sind in Fig. 58 sämtliche Zustandslinien aus Fig. 55 umgezeichnet.

1. Einflußlinie für den Auflagerdruck A.

Steht die Last P = 1 t über A, so ist die Einflußordinate gleich 1 t. Tritt die Last in das Feld I, so ist zu den entsprechenden Zustandslinien (Fig. 58a) ein Krafteck zu zeichnen (Fig. 58b), in welchem durch Parallellinien zu den an A stoßenden Seiten der Zustandslinien direkt die Auflagerdrücke A abgeschnitten werden, die senkrecht zur Tragwerkslinie A_0B_0 (Fig. 58e) aufgetragen sind. Wandert die Last über das Feld II, so erhält man die entsprechenden Auflagerdrücke A aus dem Krafteck (Fig. 58d), indem man ebenfalls zu den an A

stoßenden Seiten der Zustandslinien (Fig. 58c) Parallelen zieht, die aber zweckmäßig von den Enden der Last ausgehen. Die Einflußordinaten werden alle negativ, sie sind senkrecht

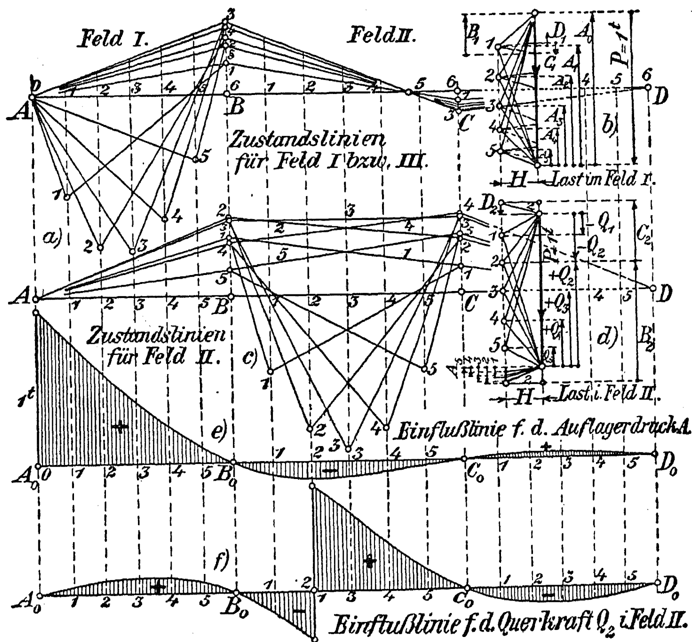


Fig. 58.

zur Tragwerkslinie B_0C_0 (Fig. 58e) aufgetragen. Tritt die Last auf das Feld III, so wird der Auflagerdruck in A gerade so groß wie der Auflagerdruck D, wenn die Last im Feld I steht. Daher kann man aus Fig. 58b die Auflagerdrücke D entnehmen und symmetrisch zur zugehörigen Laststellung im

Feld III senkrecht zur Tragwerkslinie C_0D_0 (Fig. 58e) auftragen. Diese Ordinaten sind wieder alle positiv.

2. Einflußlinie für die Querkraft Q_2 im Feld II.

Die Einflußlinie für die Querkraft eines bestimmten Schnittes ergibt sich sofort aus dem bekannten Satz, daß die Querkraft die Mittelkraft aller links von dem fraglichen Schnitt liegenden Kräfte ist (vgl. Teil I, S. 63). Diese Mittelkraft wird aus dem Krafteck Fig. 58b bzw. Fig. 58d entnommen und jeweils unter der Laststellung aufgetragen, sie ist teils positiv, teils negativ.

Wandert die Last $P = 1$ t über Feld I, also links vom fraglichen Schnitt, dann ist die Querkraft $Q = A + B - 1$. Dieser Wert ist, wie direkt aus Fig. 57d zu ersehen, positiv und kann, den einzelnen Laststellungen entsprechend, aus Fig. 58b entnommen werden. Befindet sich die Last $P = 1$ t im Feld II, aber immer noch links vom Schnitt, so ist ebenfalls $Q = A + B - 1$. Dieser Wert ist direkt aus Fig. 58d zu entnehmen; für den Punkt 2 sind alle Größen dargestellt, die Q_2 als negativen Wert liefern, entsprechend findet man auch die übrigen Werte. Liegt die Last rechts vom Schnitt, so wird $Q = A + B$. Dieser Wert wird nach Fig. 58d positiv für den Punkt 2 wie für alle weiteren rechts liegenden Laststellungen und kann direkt aus Fig. 58d abgegriffen werden. Wandert die Last über Feld III, so ist ebenfalls $Q = A + B$, da aber die Zustandslinien für Feld III denen von Feld I entsprechen, so folgt durch Vertauschung $Q = C + D$. Dieser Wert ist, wie Fig. 57d zeigt, negativ und kann für die einzelnen Laststellungen direkt aus Fig. 58b entnommen werden. Alle diese Werte sind senkrecht zur Tragwerkslinie $A_0B_0C_0D_0$ (Fig. 58f) aufgetragen, aber für Feld III symmetrisch zu Feld I.

VIII. Abschnitt.

Die durchgehenden Fachwerkträger.

§ 24. Der durchgehende Parallelträger mit ruhender und beweglicher Belastung.

Parallelträger (Fig. 59) besitzen bei wenig wechselndem Gurtquerschnitt ein nahezu gleichbleibendes Trägheitsmoment J, mithin können sie auch gemäß Abschnitt VII behandelt werden.

Bei ruhender Belastung wird man zunächst die Stützenmomente gemäß § 20 bzw. § 22 bestimmen und mit Hilfe dieser (vgl. § 21) die Auflagerdrücke festlegen. Sodann kann zu den Auflagerkräften und der zugehörigen äußeren Belastung in bekannter Weise ein Kräfteplan nach Cremona gezeichnet werden (vgl. Teil I, § 29), der die Spannkräfte sämtlicher Stäbe liefert.

Handelt es sich um bewegliche Belastung, dann wird man am besten Einflußlinien benutzen.

a) Einflußlinien für die Gurtstäbe.

Für eine Gurtspannkraft gilt gemäß Teil I, § 31, wenn man beachtet, daß beim Parallelträger $h_o = h_u = h$ ist (Fig. 59)

$$O = -\frac{M_o}{h} \quad \text{und} \quad U = +\frac{M_u}{h},$$

wobei M_o bzw. M_u das Moment der äußeren Kräfte um die Gegenpunkte der einzelnen Stäbe angibt. Hiernach folgen die Einflußlinien der Gurtspannkräfte sofort aus denjenigen der Gegenpunktsmomente, indem man die Ordinaten der letzteren mit $\frac{1}{h}$ reduziert, was mittels eines Winkels (vgl. Teil I,

Fig. 4) geschehen kann. Meistens wird jedoch sofort die Einflußlinie für das Gegenpunktsmoment benutzt; der daraus gefundene Größtwert gibt mit $\frac{1}{h}$ multipliziert die Gurtspannkraft. Der Wert $\mu = \frac{1}{h}$ heißt Veränderungsziffer oder Multiplikator der fragl. Gurtstabeinflußlinie. Somit sind

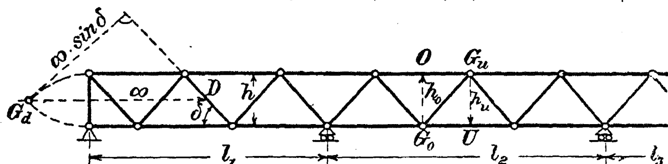


Fig. 59.

die Einflußlinien aller Gurtstäbe wie in Fig. 55, S. 109 darzustellen, zu allen gehört die gleiche Veränderungsziffer $\mu = \frac{1}{h}$.

b) Einflußlinien für die Wandstäbe.

Für die Wandstäbe gilt nach Teil I, § 31

$$D = \pm \frac{M_d}{h_d}.$$

Bei einem Parallelträger fällt aber der Gegenpunkt der Wandstäbe (Schnitt der Gurten) ins Unendliche, mithin wird nach Fig. 59 der Hebelarm $h_d = \infty \cdot \sin \delta$; ferner ist die Mittelkraft der äußeren Kräfte des links vom Schnitt liegenden Trägerstückes gleich der Querkraft Q, die ebenfalls am Hebel arm ∞ angreift, mithin wird

$$(75) \qquad D = \pm \frac{Q \cdot \infty}{\infty \cdot \sin \delta} = \pm \frac{Q}{\sin \delta}.$$

Hierbei gilt das obere Vorzeichen für von links nach

rechts fallende und das untere für von links nach rechts steigende Diagonalen.

Für senkrechte Pfosten (Vertikalen) geht D in V über und es wird

(75 a) $$V = \pm \frac{Q}{\sin 90^\circ} = \pm Q\,.$$

Aus den Gl. (75) folgt, daß die Spannkräfte in den Diagonalen und Vertikalen eines Parallelträgers direkt aus den Einflußlinien der entsprechenden Querkraft gefunden werden (vgl. Fig. 58 f), wenn man diesen die jeweils erforderliche Veränderungsziffer μ zuweist; letztere ist für eine Diagonale $\mu = \frac{1}{\sin \delta}$ und für eine Vertikale $\mu = 1$. In Fig. 60 ist die Einflußlinie einer Diagonale dargestellt.

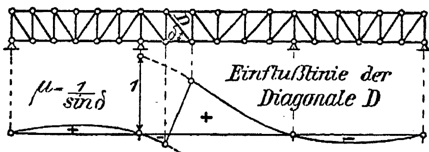


Fig. 60.

§ 25. Der durchgehende beliebig geformte Fachwerkträger mit ruhender und beweglicher Belastung.

Für derartige Träger kann auch, ähnlich wie in § 20 beim Vollwandträger, zunächst die Berechnung der Stützenmomente durchgeführt werden, dabei ergeben sich jedoch sehr verwickelte Formeln. Vorteilhafter ist es hier, das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (§ 18) anzuwenden.

a) Ruhende Belastung.

An einem über 2 Öffnungen durchgehenden Träger (Fig. 61), der durch ruhende Belastung die Stab-

spannungen S erfährt, sei dieses Verfahren gezeigt. Dieser Träger hat eine überzählige Stütze, mithin ist er einfach statisch unbestimmt. Als statisch unbestimmte Größe wird der auf die Mittelstütze C wirkende Druck X_c gewählt. Die gegenseitige Höhenlage der 3 Stützen sei unveränderlich.

Wird die überzählige Stütze C beseitigt, so entsteht das sog. Haupt- oder Grundsystem, d. i. hier ein einfacher Träger AB (Fig. 61b), dessen von der äußeren Belastung erzeugten Stabspannkräfte $\mathfrak{S}$ und Auflagerdrücke $\mathfrak{A}$ bzw. $\mathfrak{B}$ durch einen Cremonaschen Kräfteplan ermittelt werden können (vgl. Teil I, § 29). Bringt man nun an der Stelle C eine abwärts gerichtete Kraft $X_c = -1$ an (Fig. 61c), so entstehen die Stabspannkräfte $\mathfrak{s}$ sowie die Auflagerdrücke a und b, und die Durchbiegung des Trägers AB an der Stelle C infolge der wirklichen Belastung wird gemäß § 18, Gl. (60), S. 82

$$\delta_c' = \sum \mathfrak{s}\, \Delta s = \sum \frac{\mathfrak{s}\, \mathfrak{S}\, s}{EF}.$$

Läßt man ferner den aufwärts gerichteten Stützendruck X_c auf den Träger AB einwirken, so erzeugt er die Stabspannkräfte $\mathfrak{s} \cdot (-X_c)$ und die entsprechende Durchbiegung bei C wird

$$\delta_c'' = \sum \mathfrak{s}\, \Delta s = -X_c \sum \frac{\mathfrak{s}^2 s}{EF}.$$

Die wirkliche Durchbiegung $\delta_c = \delta_c' + \delta_c''$ muß wegen der unveränderlichen Lage der Stütze C gleich Null sein, also

$$\delta_c = 0 = \sum \frac{\mathfrak{s}\, \mathfrak{S}\, s}{EF} - X_c \sum \frac{\mathfrak{s}^2 s}{EF},$$

und hieraus folgt für überall gleichen Baustoff mit $E = 1$

(76) $$X_c = \sum \frac{\mathfrak{s}\, \mathfrak{S}\, s}{F} : \sum \frac{\mathfrak{s}^2 s}{F}.$$

Dieser Ausdruck ist wie auf S. 82 mit Hilfe einer Tabelle auszuwerten. Da aber von vornherein die Stabquerschnitte F unbekannt sind, so wird man die rechte Seite dieser Gleichung mit einem unveränderlichen F_c multiplizieren, das so zu wäh-

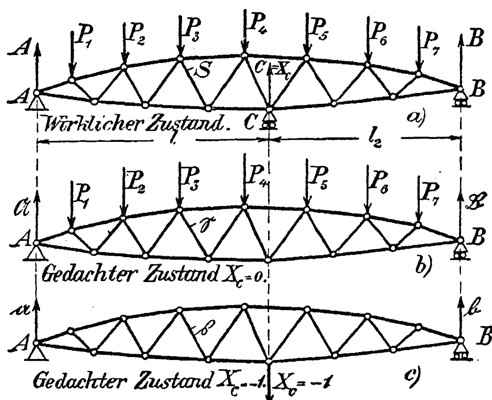


Fig. 61.

len ist (vgl. ausgeführte Träger), daß möglichst oft $F_c : F = 1$ wird, also

$$(76\,a) \qquad X_c = \Sigma \mathfrak{s}\, \mathfrak{S}\, s \cdot \frac{F_c}{F} : \Sigma \mathfrak{s}^2\, s \cdot \frac{F_c}{F}.$$

Sobald X_c bekannt ist, folgen die wirklichen Stabspannungen bzw. Auflagerdrücke aus

$$(77) \qquad \begin{cases} S = \mathfrak{S} - \mathfrak{s} \cdot X_c, \\ A = \mathfrak{A} - \mathfrak{a} \cdot X_c \quad \text{und} \quad B = \mathfrak{B} - \mathfrak{b} \cdot X_c. \end{cases}$$

b) Bewegliche Belastung.

Für einen Träger mit beweglicher Belastung benutzt man Einflußlinien, die in ähnlicher Weise festzulegen sind.

Wird im Knoten m eines einfachen Fachwerkträgers AB (Fig. 62) die Last $P_m = 1$ angebracht, die die Stabspannkräfte $\mathfrak{S}_m$ erzeugt, so erfährt ein beliebiger Knoten C in gegebener Richtung die Verschiebung δ_{cm}. Bringt man am Knoten C eine in dieser Richtung wirkende Kraft $P_c = 1$ an, die die Spannkräfte $\mathfrak{S}_c$ erzeugt, so folgt nach § 18, S. 82

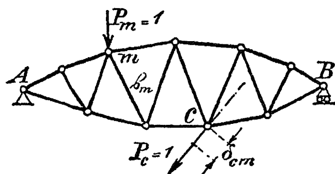


Fig. 62.

$$\delta_{cm} = \Sigma \mathfrak{S}_c \Delta s = \Sigma \mathfrak{S}_c \cdot \mathfrak{S}_m \cdot \frac{s}{EF};$$

hierbei gibt der erste Zeiger c den Ort der Durchbiegung (Verschiebung) und der zweite m den Ort der Ursache an.

Wird nun die Rolle der Lasten $P_m = 1$ und $P_c = 1$ vertauscht, so erhält man dieselben Stabkräfte und es folgt für die Verschiebung des Knotens m wie oben

$$\delta_{mc} = \Sigma \mathfrak{S}_m \Delta s = \Sigma \mathfrak{S}_m \cdot \mathfrak{S}_c \cdot \frac{s}{EF}.$$

Die rechte Seite ist bei beiden Werten gleich, somit folgt

(78) $$\delta_{cm} = \delta_{mc},$$

d. h. die Kraft $P_m = 1$ ruft in C eine Verschiebung hervor, die ebenso groß ist wie diejenige in m, erzeugt durch die Kraft $P_c = 1$; dies ist der Maxwellsche Satz von der Gegenseitigkeit der Verschiebungen.

Dieser Satz ist überaus wichtig für die Ermittelung der Einflußlinien statisch unbestimmter Größen, wie nachstehend gezeigt wird.

Für den in Fig. 63a gegebenen Träger ACB soll die Einflußlinie des Druckes X_c in der Mittelstütze bestimmt

werden. Man beseitigt den Stützdruck X_c und denkt an seiner Stelle, in Richtung der auf dem Träger wandernden Last $P_m = 1$, eine Last $X_c = -1$ wirkend (Fig. 63 b); dann wird die durch $P_m = 1$ in C verursachte Durchbiegung

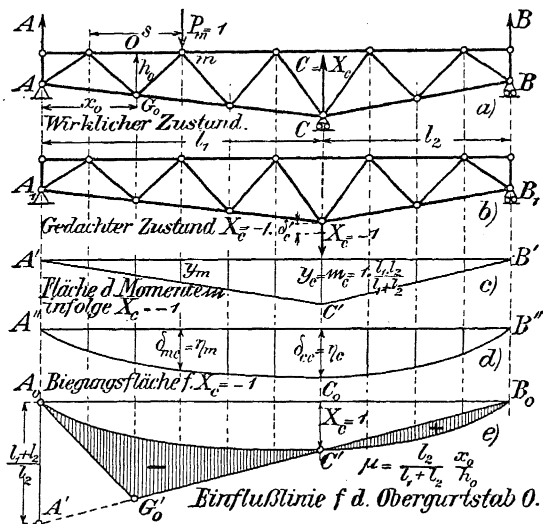


Fig. 63.

$\delta_c' = 1 \cdot \delta_{cm}$ (vgl. S. 82). Steht die wandernde Last über C, ist also $P_c = 1$, so wird die Durchbiegung in C gleich $1 \cdot \delta_{cc}$ und die durch den in C nach oben wirkenden Auflagerdruck X_c bewirkte Durchbiegung beträgt $\delta_c'' = -X_c \cdot \delta_{cc}$. Die insgesamt auftretende wirkliche Verschiebung muß somit sein

$$\delta_c = \delta_c' + \delta_c'' = 1 \cdot \delta_{cm} - X_c \delta_{cc}.$$

Nach dem Maxwellschen Satz [Gl. (78)] ist aber $\delta_{cm} = \delta_{mc}$,

also $\delta_c = 1 \cdot \delta_{mc} - X_c \delta_{cc}$ oder

$$(79) \qquad X_c = \frac{1 \cdot \delta_{mc} - \delta_c}{\delta_{cc}}.$$

Diese Gleichung gilt auch für ruhende Belastung
mehrere Einzellasten P erhält sie die Form

$$(79a) \qquad X_c = \frac{\Sigma P \delta_{mc} - \delta_c}{\delta_{cc}}.$$

Ist das Auflager C unverschieblich, so wird $\delta_c = 0$,
es gilt

$$(79b) \qquad X_c = \frac{1 \cdot \delta_{mc}}{\delta_{cc}}.$$

Dies ist die Gleichung der Einflußlinie für X_c.

Nun ist aber $\delta_{mc} = \eta_m$ die Durchbiegung eines belieb
Punktes m und $\delta_{cc} = \eta_c$ die gleichzeitige Durchbiegung
Punktes C, wenn in C die Last $P_c = 1$ wirkt, also

$$(79c) \qquad X_c = \frac{\eta_m}{\eta_c}.$$

Für einen gegebenen Fall ist η_c eine Unveränderliche
kann als Veränderungsziffer $\left(\mu = \frac{1}{\eta_c}\right)$ betrachtet wer
mithin stellt die Biegungslinie des einfachen Träg
AB (Fig. 63b), der im Punkt C die Last $X_c = -1$ trägt
Einflußlinie des Stützendruckes X_c dar (Fig. 63c

Wird vom Einfluß der Wandstäbe abgesehen, so kann
Biegungslinie nach § 17 mittels eines Seilecks ermi
werden, das für die elastischen Gewichte $\varrho = \frac{m \cdot s}{EFh^2}$
zeichnet wird (vgl. Fig. 36). Hierbei bedeutet m das in
Gegenpunkten der einzelnen Gurtstäbe durch $X_c = -$ 1
igte Moment. Da aber η_m und η_c derselben Biegu

linie entnommen werden, also nur ihr Verhältnis ausschlaggebend ist, so können die m, wie auch die zugehörige Polweite H, in beliebiger Größe benutzt werden. Die m wird man daher durch die Ordinaten y eines einfachen Dreiecks A′B′C′ (Fig. 63c) ersetzen. Wird schließlich ein unveränderl ches F_c eingeführt und E = 1 gesetzt (unveränderlicher Baustoff), so folgt

$$\varrho = \frac{y \cdot s}{h^2} \cdot \frac{F_c}{F}. \tag{80}$$

Die Verhältnisse $\frac{F_c}{F}$ wählt man nach ausgeführten Konstruktionen. Durch Benutzung der Gl. (60), S. 82 kommen auch die Wandstäbe zur Geltung.

Nachdem die Einflußlinie für X_c bekannt ist, können auch die Einflußlinien der einzelnen Fachwerkstäbe ermittelt werden. Für einen Obergurtstab gilt (Teil I, S. 121) $O = -\frac{M_0}{h_0}$. Bezeichnet $\mathfrak{M}_0$ das Moment des statisch bestimmten Trägers AB (Fig. 63b) an der Stelle x_0, so wird

$$M_0 = \mathfrak{M}_0 - X_c \frac{l_2}{l_1 + l_2} x_0 = \frac{l_2}{l_1 + l_2} x_0 \left(\frac{\mathfrak{M}_0}{\frac{l_2}{l_1 + l_2} x_0} - X_c \right)$$

oder

$$\left\{ \begin{aligned} O &= -\frac{l_2}{l_1 + l_2} \cdot \frac{x_0}{h_0} \left(\frac{\mathfrak{M}_0}{\frac{l_2}{l_1 + l_2} x_0} - X_c \right) \\ &= -\mu \left(\frac{\mathfrak{M}_0}{\frac{l_2}{l_1 + l_2} x_0} - X_c \right). \end{aligned} \right. \tag{81}$$

Dieser Wert läßt sich in einfacher Weise zeichnerisch darstellen, wie Fig. 63e zeigt. Man trägt die X_c-Linie an die

Tragwerkslinie $A_0C_0B_0$ und macht $A_0A' = \frac{l_1 + l_2}{l_2}$ (Kräftemaßstab).

IX. Abschnitt.

Die Formänderungen vollwandiger Bogenträger.

§ 26. Der in einer Ebene gekrümmte vollwandige Träger, beeinflußt durch Biegungsmomente und Normalkräfte.

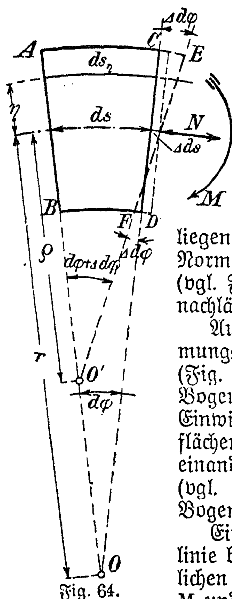


Fig. 64.

1. Winkeländerungen (Verdrehungswinkel) und Längenänderungen.

Nach § 7 wirkt auf jeden Bogenquerschnitt eine in der Bogenebene liegende Kraft R, die ein Moment M, eine Normalkraft N und eine Querkraft Q erzeugt (vgl. Fig. 18, S. 53). Letztere wird meist vernachlässigt.

Aus einem Bogenträger mit dem Krümmungshalbmesser r wird ein kleines Stück ABCD (Fig. 64) mit dem Zentriwinkel $d\varphi$ und der Bogenlänge $ds = r\,d\varphi$ ausgetrennt. Unter der Einwirkung von M und N drehen sich die Endflächen AB und CD um den Winkel $\Delta\,d\varphi$ gegeneinander und ds streckt sich um $\Delta ds = \varepsilon_0 ds$ (vgl. S. 54), wenn ε_0 die Dehnung für die Bogenmitte angibt.

Eine im Abstand η von der Bogenmittellinie befindliche Stabschicht mit der ursprünglichen Länge $ds_\eta = (r + \eta)\,d\varphi$ erfährt durch M und N eine Längenänderung $\Delta\,ds_\eta = \varepsilon_0 ds + \eta\,\Delta\,d\varphi = \varepsilon_0 r\,d\varphi + \eta\,\Delta\,d\varphi$. Die Dehnung dieser Schicht ist somit

$$\varepsilon = \frac{\Delta\,ds_\eta}{ds_\eta} = \frac{\varepsilon_0 r\,d\varphi + \eta\,\Delta\,d\varphi}{(r + \eta)\,d\varphi}$$

oder nach Kürzung mit $r \cdot d\varphi$

$$\varepsilon = \frac{\varepsilon_0 + \frac{\eta}{r}\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}}{1 + \frac{\eta}{r}} = \frac{\varepsilon_0 + \frac{\eta}{r}\tau}{1 + \frac{\eta}{r}} = \frac{r \cdot \varepsilon_0 + \eta \cdot \tau}{r + \eta}.$$

Hierbei ist $\frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \tau$ die spezifische Winkeländerung oder die Winkeldehnung. Aus vorstehender Gleichung folgt weiter

$$\varepsilon = \frac{r \cdot \varepsilon_0 + \eta\tau + \eta\varepsilon_0 - \eta\varepsilon_0}{r + \eta} = \varepsilon_0 + \frac{(\tau - \varepsilon_0)\eta}{r + \eta},$$

und die Spannung dieser Schicht wird schließlich (vgl. S. 54)

(82) $$\sigma = \varepsilon \cdot E = E\left[\varepsilon_0 + \frac{(\tau - \varepsilon_0)\eta}{r + \eta}\right].$$

Durch das Gleichgewicht zwischen äußeren und inneren Kräften ist weiter bedingt

(83) $$\begin{cases} N = \int \sigma \cdot dF = E\int\left[\varepsilon_0 + (\tau - \varepsilon_0)\frac{\eta}{r + \eta}\right]dF, \\ M = \int \sigma \cdot \eta \cdot dF = E\int \eta\left[\varepsilon_0 + (\tau - \varepsilon_0)\frac{\eta}{r + \eta}\right]dF. \end{cases}$$

Die Summierungen (Integrationen) sind jeweils nur über die einzelnen Querschnitte auszudehnen, wobei η die einzige Veränderliche ist, also

$$N = E\left[\varepsilon_0\int dF + (\tau - \varepsilon_0)\int\frac{\eta}{r + \eta}\,dF\right],$$

$$M = E\left[\varepsilon_0\int \eta\,dF + (\tau - \varepsilon_0)\int\frac{\eta^2}{r + \eta}\,dF\right].$$

Nun ist aber $\int dF = F$ und $\int \eta\,dF = 0$, weil η auf die Schwerpunktsachse bezogen ist. Ferner sei $\int\frac{\eta^2}{r + \eta}\,dF = \frac{Y}{r}$ gesetzt, da aber

$$\frac{\eta}{r + \eta} = \frac{\eta r - \eta^2 + \eta^2}{r(r + \eta)} = \frac{\eta}{r} - \frac{\eta^2}{r(r + \eta)},$$

so folgt

$$\int\frac{\eta}{r + \eta}\,dF = \int\frac{\eta}{r}\,dF - \int\frac{\eta^2\,dF}{r(r + \eta)} = 0 - \frac{Y}{r^2} = -\frac{Y}{r^2},$$

wobei der Unterschied zwischen r und $r + \eta$ als unerheblich ver-

nachlässigt wurde. Mit Rücksicht auf diese Werte wird

(83a)
$$\begin{cases} N = E\left[\varepsilon_0 F - (\tau - \varepsilon_0)\frac{Y}{r^2}\right], \\ M = E\left[(\tau - \varepsilon_0)\frac{Y}{r}\right]. \end{cases}$$

Aus diesen Gleichungen erhält man schließlich

(84)
$$\begin{cases} \varepsilon_0 = \frac{1}{EF}\left(N + \frac{M}{r}\right), \\ \tau = \frac{1}{E}\left[\frac{1}{F}\left(N + \frac{M}{r}\right) + \frac{Mr}{Y}\right], \end{cases}$$

und damit sind die Dehnungen eines Bogenträgers bestimmt.

Wird schließlich wieder $\varepsilon_0 ds = \Delta ds$ gesetzt, so folgt für die Längenänderung eines Elementes der Bogenachse

(84a)
$$\Delta ds = \varepsilon_0 ds = \frac{ds}{EF}\left(N + \frac{M}{r}\right),$$

und wenn $\tau = \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi} = \frac{r \cdot \Delta d\varphi}{ds}$ eingeführt wird, folgt für die Winkeländerung eines Bogenachsenelementes

(84b)
$$\Delta d\varphi = \frac{ds}{E}\left[\frac{1}{r \cdot F}\left(N + \frac{M}{r}\right) + \frac{M}{Y}\right].$$

Die im Hoch- und Brückenbau vorkommenden Bogenträger haben große Halbmesser r, mithin kann $\frac{M}{r}$ gegen N vernachlässigt werden, also

(85)
$$\begin{cases} \Delta ds = \frac{Nds}{EF}, \\ \Delta d\varphi = \frac{ds}{E}\left[\frac{N}{rF} + \frac{M}{Y}\right] = \frac{Mds}{EY} + \frac{Nds}{rEF}. \end{cases}$$

Der Wert

$$Y = r\int\frac{\eta^2 dF}{r + \eta} = J + \frac{1}{r}\int\eta^3 dF + \frac{1}{r^2}\int\eta^4 dF + \ldots$$

wird für zur Biegungsebene symmetrische Querschnitte

$$Y = J + \frac{1}{r}\int\eta^4 dF + \frac{1}{r^4}\int\eta^6 dF + \ldots\ldots$$

und geht für $r = \infty$ (gerader Träger) über in $Y = J$. Für die bei Baukonstruktionen üblichen Halbmesser kann immer $Y = J$ gesetzt werden. Vernachlässigt man auch noch die Normalkräfte gegenüber den Momenten, so wird

(85 a) $$\Delta\, d\varphi = \frac{M\, ds}{EJ},$$

dies ist für endliche Längen Δs derselbe Wert wie in Gl. (44), S. 56 beim geraden Träger.

2. Formänderungen (Durchbiegungen).

a) Änderung des Krümmungshalbmessers r (Krümmung).

Für den gekrümmten unbelasteten Träger gilt (Fig. 64) $ds = r\, d\varphi$; durch Einwirkung von M und N wird r zu ϱ und zugleich erhält man $ds + \Delta ds = \varrho (d\varphi + \Delta d\varphi)$.

Durch Division dieser Werte folgt

$$\frac{ds + \Delta ds}{ds} = 1 + \varepsilon_0 = \frac{\varrho (d\varphi + \Delta d\varphi)}{r\, d\varphi} = \frac{\varrho}{r}\left(1 + \frac{\Delta d\varphi}{d\varphi}\right)$$

$$= \frac{\varrho}{r}(1 + \tau) \text{ oder}$$

$$\frac{r}{\varrho} = \frac{1 + \tau}{1 + \varepsilon_0} = \frac{1 + \tau + \varepsilon_0 - \varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0} = 1 + \frac{\tau - \varepsilon_0}{1 + \varepsilon_0}.$$

Wird die kleine Größe ε_0 gegen 1 vernachlässigt, so gilt

(86) $$\frac{r}{\varrho} = 1 + \tau - \varepsilon_0 .$$

Hieraus folgt mit den in Gl. (84) gegebenen Werten

$$\frac{r}{\varrho} = 1 + \frac{1}{E}\left[\frac{1}{F}\left(N + \frac{M}{r}\right) + \frac{M r}{Y}\right] - \frac{1}{EF}\left(N + \frac{M}{r}\right),$$

(86 a) $$\frac{r}{\varrho} = 1 + \frac{M r}{EY}, \quad \text{angenähert } \frac{r}{\varrho} = 1 + \frac{M r}{EJ},$$

und schließlich erhält man für die Krümmungsänderung

(87) $$\frac{1}{\varrho} - \frac{1}{r} = \frac{M}{EJ}$$

Mit $r = \infty$ ergibt sich hieraus $\frac{1}{\varrho} = \frac{M}{EJ}$; dies ist der bereits in Gl. (43), S. 55 für den geraden Träger gefundene Wert.

b) Wagerechte und lotrechte Verschiebungen.

Es sei ein gekrümmter Träger AB (Fig. 65 a) betrachtet, der im Punkt A (Koordinaten x_0 und y_0) festgehalten ist und zunächst nur bei C (Koordinaten x und y) eine elastische Stelle von der Länge ds besitzt. Wird diese Stelle der Einwirkung einer Normalkraft N und

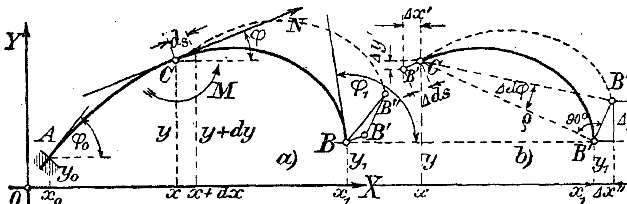


Fig. 65.

eines Momentes M unterworfen, so erfährt das freie Trägerende B (Koordinaten x_1 und y_1) eine Verrückung BB'', die sich aus einer Verschiebung BB' in Richtung von N und aus einer Verdrehung B'B'' zusammensetzt. Diese beiden Bewegungen werden gesondert untersucht (vgl. § 15, S. 70) und auf eine wagerechte (X) bzw. lotrechte Achse (Y) projiziert.

Durch die Normalkraft N erfährt das elastische Bogenteilchen eine Verlängerung Δds, die am Bogenende als Strecke $BB' = \Delta ds$ erscheint. Die Richtung von Δds ist durch den Winkel φ der Bogentangente bzw. durch $\operatorname{tg}\varphi = \frac{dy}{dx}$ festgelegt. Das in Fig. 65 b als Strecke CB' aufgetragene Δds ergibt als

wagerechte Verschiebung $\Delta x' = \Delta ds \cdot \cos\varphi = \Delta ds \cdot \frac{dx}{ds}$, als

lotrechte Verschiebung $\Delta y' = \Delta ds \cdot \sin\varphi = \Delta ds \cdot \frac{dy}{ds}$

Das Moment M verdreht die Bogenachse innerhalb des elastischen Teilchens um den Winkel $\Delta d\varphi$ und die Verdrehung des freien Trägerendes wird nach Fig. 65 b $\overline{B'B''} = \varrho \Delta d\varphi$. Bildet man

von dieser Strecke die wagerechte und lotrechte Projektion, so folgt aus den dabei entstehenden ähnlichen Dreiecken

$$\frac{\Delta x''}{-(y_1-y)} = \frac{B'B''}{\varrho} = \frac{\varrho \Delta d\varphi}{\varrho} = \Delta d\varphi \text{ bzw. } \frac{\Delta y''}{x_1-x} = \frac{B'B''}{\varrho} = \Delta d\varphi$$

oder für die wagerechte Verschiebung $\Delta x'' = -(y_1 - y)\Delta d\varphi$
und für die lotrechte Verschiebung $\Delta y'' = (x_1 - x)\Delta d\varphi$

Die Gesamtverschiebung beträgt somit

in wagerechtem Sinn $\Delta x = \Delta x' + \Delta x'' = \Delta ds \cdot \frac{dx}{ds} - (y_1 - y)\Delta d\varphi$,

in lotrechtem Sinn $\Delta y = \Delta y' + \Delta y'' = \Delta ds \cdot \frac{dy}{ds} + (x_1 - x)\Delta d\varphi$.

Wird nun der ganze Träger AB (Fig. 65) elastisch, so sind die gefundenen Größen über seine ganze Länge zu summieren. Die endgültige Lage der Endquerschnitte A und B zueinander ist bestimmt durch

den Verdrehungswinkel $\Delta(\varphi_1 - \varphi_0) = \int_0^1 \Delta d\varphi$,

die wagerechte Verschiebung $\Delta(x_1 - x_0) = \int_0^1 \frac{\Delta ds}{ds} dx - (y_1 - y)\Delta d\varphi$

und

die lotrechte Verschiebung $\Delta(y_1 - y_0) = \int_0^1 \frac{\Delta ds}{ds} dy + (x_1 - x)\Delta d\varphi$,

wobei nur die Koordinaten zwischen den Endquerschnitten als veränderlich gelten. Setzt man schließlich in diese Gleichungen die in Gl. (85) gefundenen Werte ein, so folgt für große Halbmesser r als Verdrehungswinkel

$$(88) \quad \begin{cases} \Delta(\varphi_1 - \varphi_0) = \int_0^1 \left(\frac{M\,ds}{EJ} + \frac{N\,ds}{EFr}\right), \text{ angenähert} \\ \Delta(\varphi_1 - \varphi_0) = \int_0^1 \frac{M\,ds}{EJ}, \end{cases}$$

wie beim geraden Balken [vgl. Gl. (45 b), S. 56].

Die wagerechte Verschiebung wird

(89)
$$\Delta(x_1 - x_0) = \int_0^1 -(y_1 - y)\left(\frac{M\,ds}{EJ} + \frac{N\,ds}{EFr}\right) + \int_0^1 \frac{N}{EF}\,dx,$$
angenähert
$$\Delta(x_1 - x_0) = \int_0^1 \frac{My}{EJ}\,ds - y_1\int_0^1 \frac{M}{EJ}\,ds + \int_0^1 \frac{N}{EF}\,dx,$$

und für die lotrechte Verschiebung folgt

(90)
$$\Delta(y_1 - y_0) = \int_0^1 (x_1 - x)\left(\frac{M\,ds}{EJ} + \frac{N\,ds}{EFr}\right) + \int_0^1 \frac{N}{EF}\,dy,$$
angenähert
$$\Delta(y_1 - y_0) = x_1\int_0^1 \frac{M}{EJ}\,ds - \int_0^1 \frac{Mx}{EJ}\,ds + \int \frac{N}{EF}\,dy.$$

Dies sind die Elastizitätsgleichungen eines gekrümmten Trägers, nach denen jeder vollwandige Bogenträger mit weniger als 3 Gelenken berechnet werden kann.

§ 27. Graphische Darstellung der elastischen Linie eines vollwandigen Bogenträgers.

Der Bogenträger wird durch einen sog. Stabzug ersetzt, der aus kurzen Trägerstücken besteht, die steif miteinander verbunden sind (Fig. 66). An den Stoßstellen der einzelnen Trägerstücke bestimmt man die von der äußeren Belastung hervorgebrachten Normalkräfte N und Biegungsmomente M. Durch erstere erfahren die Trägerstücke eine Längenänderung, die nach Gl. 56, S. 69 gleich $\Delta s = \frac{N \cdot s}{EF}$ ist, während durch die Momente eine gegenseitige Verdrehung der Trägerteile erfolgt, wodurch ihre Randwinkel W geändert werden. Betrachtet man jedes Trägerstück als beiderseits eingespann-

ten Träger, so wird die Änderung des Randwinkels W_m (Fig. 66), gemäß Gl. (65b), S. 87 mit St = 0 (vgl. Fig. 43), für das links liegende Trägerstück

$$\gamma_m = \frac{s_m}{6EJ_m}(2M_m + M_{m-1})$$

und gemäß Gl. (65a) für das rechts liegende Stück

$$\gamma_m = \frac{s_{m+1}}{6EJ_{m+1}}(2M_m + M_{m+1}).$$

Die Gesamtänderung wird somit

$$(91)\quad \varDelta W_m = \frac{s_m}{6EJ_m}(2M_m + M_{m-1}) + \frac{s_{m+1}}{6EJ_{m+1}}(2M_m + M_{m+1})$$

Näherungsweise ist aber $M_{m-1} = M_m = M_{m+1}$, und wird $s_m = s_{m+1}$ sowie $J_m = J_{m+1}$ gesetzt, so folgt

$$(91a)\quad \varDelta W_m = \frac{s_m M_m}{EJ_m},$$

[vgl. Gl. (44) S. 56 bzw. (85a) S. 127].

Die hiernach für sämtliche Stabteile berechneten Winkeländerungen dienen in Verbindung mit den Längenänderungen $\varDelta s$ zur Darstellung eines Verschiebungsplanes, wobei ähnlich wie im § 16, Fig. 33, S. 73 zu verfahren ist. Für einen statisch bestimmt aufgelagerten Bogenträger AB (Fig. 67) mögen gemäß vorstehenden Gleichungen die Längen- und Winkeländerungen der einzelnen Trägerstücke (Stäbe) bestimmt sein und es soll ein Verschiebungsplan damit gezeichnet werden.

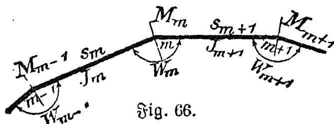


Fig. 66.

Zunächst wird das erste Teilstück (Stab 1, anschraffiert) des Bogenträgers derart festgehalten, daß es sich nur in seiner

Bogenende B eine Verschiebung BB′ erfährt. Gleichzeitig mit der Längenänderung von s erfährt auch der zugehörige Gegenpunktswinkel ψ eine Änderung $\Delta\psi = \frac{\Delta s}{h}$ (vgl. S. 77), und wenn die Entfernung zwischen dem Gegenpunkt G und dem freien Ende B

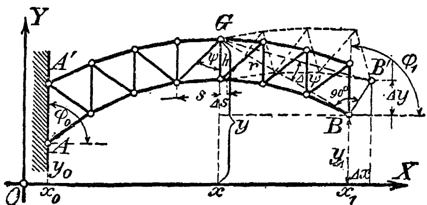


Fig. 68.

gleich r ist, wird $BB' = r \cdot \Delta\psi$. Bildet man nun von dieser Strecke die wagerechte und lotrechte Projektion, so folgt aus den dabei entstehenden ähnlichen Dreiecken

$$\frac{\Delta x}{-(y_1 - y)} = \frac{BB'}{r} = \frac{r\Delta\psi}{r} = \Delta\psi \quad \text{oder} \quad \Delta x = -(y_1 - y)\Delta\psi,$$

$$\text{und} \ \frac{\Delta y}{x_1 - x} = \frac{BB'}{r} = \frac{r\Delta\psi}{r} = \Delta\psi \quad \text{oder} \quad \Delta y = (x_1 - x)\Delta\psi.$$

Erleiden alle Fachwerkstäbe Längenänderungen, so gilt, wenn von dem geringen Einfluß der Wandstäbe abgesehen wird, für den Verdrehungswinkel der Endstäbe gegeneinander

$$\Delta(\varphi_1 - \varphi_0) = \sum_0^1 \Delta\psi,$$

für die wagerechte Verschiebung $\Delta(x_1 - x_0) = -\Sigma(y_1 - y)\Delta\psi$,
für die lotrechte Verschiebung $\Delta(y_1 - y_0) = \Sigma(x_1 - x)\Delta\psi$.

Nun ist aber ganz allgemein nach S. 79 die Winkeländerung $\Delta\psi = \varrho = \frac{Ms}{EFh^2}$, wenn M das den einzelnen Stäben zugehörige Gegenpunktsmoment bedeutet, mithin wird der Verdrehungswinkel der Endstäbe

(92) $$\Delta(\varphi_1 - \varphi_0) = \sum_0^1 \frac{Ms}{EFh^2},$$

die wagerechte Verschiebung der Bogenenden

$$(93)\quad \begin{cases} \Delta(x_1 - x_0) = -\sum_0^1 (y_1 - y) \frac{Ms}{EFh^2} \\ = -y_1 \sum_0^1 \frac{Ms}{EFh^2} + \sum_0^1 \frac{Mys}{EFh^2} \end{cases}$$

und die lotrechte Verschiebung der Bogenenden

$$(94)\quad \begin{cases} \Delta(y_1 - y_0) = \sum_0^1 (x_1 - x) \frac{Ms}{EFh^2} \\ = x_1 \sum_0^1 \frac{Ms}{EFh^2} - \sum_0^1 \frac{Mxs}{EFh^2} . \end{cases}$$

Dies sind die Elastizitätsgleichungen zur Berechnung von Bogenfachwerkträgern mit weniger als 3 Gelenken

§ 29. Graphische Darstellung der Formänderungen (Biegungslinie) gebogener Fachwerkträger.

Die Durchbiegungen gebogener Fachwerkträger ermittelt man am einfachsten durch Verschiebungspläne, genau so wie für einfache gerade Fachwerträger (vgl. § 16, S. 75), indem man die den einzelnen Stäben zugehörigen Δs berechnet und in bekannter Weise von einem Pol O aufträgt. Mit den erhaltenen Knotenpunktsverschiebungen ist dann die Biegungslinie des Ober- bzw. Untergurtes zu zeichnen (vgl. Fig. 33 und 34, S. 73 bzw. 75).

Die Biegungslinien können auch sofort ermittelt werden, indem man die elastischen Gewichte $\varrho = \frac{Ms}{EFh^2}$ auf den Träger setzt und dazu die Momentenlinie zeichnet (vgl. Fig. 36, S. 79). Das in letztere eingezeichnete, den Knotenpunkten des Lastgurtes entsprechende Vieleck ist die Biegungslinie dieses Gurtes.

Handelt es sich nur um die Durchbiegung eines bestimmten Trägerpunktes, dann verwendet man am besten das Prinzip der virtuellen Verschiebungen (vgl. § 18).

XI. Abschnitt.

Der vollwandige Zweigelenkbogen.

§ 30. Der Zweigelenkbogen mit ruhender Belastung.

Der Zweigelenkbogen (Fig. 69) ist *einfach statisch unbestimmt*, weil er mit der Erdscheibe durch 4 Stützenstäbe verbunden ist. Beseitigt man einen dieser Stäbe, so ergibt sich als *Haupt- oder Grundsystem* ein gebogener, statisch bestimmter Träger, der an den Enden frei gelagert ist (Fig. 69b). Die Momente $\mathfrak{M}$ und Normalkräfte $\mathfrak{N}$ dieses Trägers können wie früher (vgl. I. Teil, § 24 bzw. § 34 oder II. Teil, § 8) ermittelt werden. Als *statisch unbestimmte Größe* wird hier der *Horizontalschub* H gewählt, dessen Größe von der Längenänderung Δl der Kämpferverbindungslinie AB (*Bogenspannweite* l) abhängt und mittels der *Elastizitätsgleichungen* auf S. 130 berechnet werden kann.

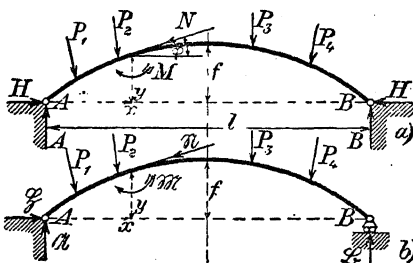


Fig. 69.

Gestatten die Widerlager eine Spannweitenänderung Δl, so

folgt aus Gl. (89), S. 130 mit $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, $x_1 = l$ und $y_1 = 0$

$$(95) \qquad \Delta l = \int_0^l \frac{M\,y}{EJ}\,ds + \int_0^l \frac{N}{EF}\,dx\,.$$

Erfährt der Bogen außerdem eine gleichmäßige Erwärmung um t Grad, so vergrößert er seine Spannweite l um

$$\Delta l' = \omega\,t\,l\,,$$

wobei ω das Dehnungsverhältnis für 1 Grad ist.

Für das Moment in einem beliebigen Querschnitt C des Zweigelenkbogens gilt ebenso wie beim Dreigelenkbogen [vgl. Gl. (25), S. 36]

$$M_c = \mathfrak{M}_c - H \cdot y_c\,,$$

wenn $\mathfrak{M}_c$ das Moment an der Stelle C eines einfachen Trägers AB ist. Wird dieser Wert in allgemeiner Form in Gl. (95) eingeführt und außerdem genügend genau $N = -\dfrac{H}{\cos\alpha}$ gesetzt (negativ wegen der Druckwirkung), so folgt

$$\Delta l = \int_0^l (\mathfrak{M} - H\,y)\,\frac{y}{EJ}\,ds - \int_0^l \frac{H}{EF}\,\frac{dx}{\cos\alpha} + \omega\,t\,l\,.$$

Für durchgehends gleichen Baustoff ist E unveränderlich, und mit $\dfrac{dx}{\cos\alpha} = ds$ folgt

$$(96) \qquad E\,\Delta l = \int_0^l \mathfrak{M}\,y\,\frac{ds}{J} - H\left(\int_0^l y^2\,\frac{ds}{J} + \int_0^l \frac{ds}{F}\right) + E\,\omega\,t\,l\,.$$

$$(97) \qquad H = \frac{-E\,\Delta l + \int_0^l \mathfrak{M}\,y\,\frac{ds}{J} + E\,\omega\,t\,l}{\int_0^l y^2\,\frac{ds}{J} + \int_0^l \frac{ds}{F}}\,.$$

Für starre Widerlager ($\Delta l = 0$) folgt unter Vernachlässigung der Wärmewirkung

$$(98) \qquad H = \frac{\int\limits_0^l \mathfrak{M}\, y \frac{ds}{J}}{\int\limits_0^l y^2 \frac{ds}{J} + \int\limits_0^l \frac{ds}{F}} .$$

Sind die Trägheitsmomente des Bogens veränderlich, so führt man am besten ein gleichbleibendes J_c ein, und es kommen dann in den ausschlaggebenden Gliedern nur noch die Verhältnisse $\frac{J_c}{J}$ vor, die leicht nach ähnlichen, ausgeführten Bogenträgern gewählt werden können. Ersetzt man schließlich noch die kleine Länge ds durch die endliche Lamellenlänge Δs, so wird obige Integration in eine einfache Summierung verwandelt. Für eine Lamelle wird nach Fig. 70 die Momentensumme gleich dem Inhalt eines Trapezes

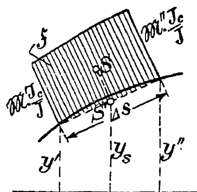


Fig. 70.

$$\frac{1}{2}\left(\mathfrak{M}' \frac{J_c}{J} + \mathfrak{M}'' \frac{J_c}{J}\right) \Delta s = \mathfrak{M}_m \frac{J_c}{J} \Delta s = \mathfrak{F} ,$$

zu dessen auf Δs projiziertem Schwerpunkt die Ordinate y_s gehört, also

$$(98\,a) \qquad \left\{ \begin{aligned} H &= \frac{\sum\limits_0^l \mathfrak{M}_m \frac{J_c}{J} \Delta s \cdot y_s}{\sum\limits_0^l y^2 \frac{J_c}{J} \Delta s + \sum\limits_0^l \frac{J_c}{F} \Delta s} \\ &= \frac{\sum\limits_0^l \mathfrak{F} \cdot y_s}{\sum\limits_0^l y_s^2 \frac{J_c}{J} \Delta s + \sum\limits_0^l \frac{J_c}{F} \Delta s} \end{aligned} \right.$$

Diese Summen können mittels nachstehender Tabelle leicht berechnet werden.

Lamelle	Δs	J	$\frac{J_c}{J}$	y_s	y_s^2	$\mathfrak{M}_m$	$\mathfrak{M}_m \frac{J_c}{J} {}_s\Delta s$	$y_s^2 \frac{J_c}{J} \Delta s$	F	$\frac{J_c}{F}$	$\frac{J_c}{F} \Delta s$
1	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
2	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.	.
							$\Sigma 1$	$\Sigma 2$			$\Sigma 3$

Hiermit wird

$$H = \frac{\Sigma 1}{\Sigma 2 + \Sigma 3}. \tag{98b}$$

$\Sigma 3$ stellt den Einfluß der Normalkräfte dar, der nur bei sehr flachen Bögen berücksichtigt zu werden braucht. Setzt man für F einen Mittelwert F_m, so wird

$$\sum_0^1 \frac{J_c}{F} \Delta s = \frac{J_c}{F_m} \Sigma \Delta s = \frac{J_c}{F_m} B = c, \tag{99}$$

wenn B die Bogenlänge darstellt.

Der Zähler in Gl. (98a) $\sum_0^1 \mathfrak{F} \cdot y_s$ stellt das statische Moment der im Verhältnis $\frac{J_c}{J}$ verzerrten Momentenfläche des statisch bestimmt gemachten Bogenträgers in bezug auf die Kämpferverbindungslinie AB dar (Fig. 71a). Bei lotrechter Belastung kann die $\mathfrak{M}$-Fläche als Momentenfläche eines einfachen Trägers gezeichnet werden (Fig. 71b), dessen Stützweite gleich der Bogenspannweite l ist. Bezeichnet man die Ordinaten der $\mathfrak{M}$-Fläche mit $\mathfrak{y}$, so wird $\mathfrak{M} = \mathfrak{y} \cdot \mathfrak{H}$. Multipliziert man diese Momente mit $\frac{J_c}{J}$, so ergeben sich die Ordinaten der Belastungsfläche in Fig. 71a. Wird schließlich noch für jede Lamelle der Mittelwert $\mathfrak{M}_m \frac{J_c}{J}$ mit Δs multipliziert,

so erhält man die als elastische Gewichte zu betrachtenden Größen $F_1 F_2 \ldots F_8$. Die Schwerpunkte derselben werden auf die Δs projiziert und damit sind die y_s gefunden. Betrachtet man nun die F_1 bis F_8 als wagerechte Kräfte, von denen jede im

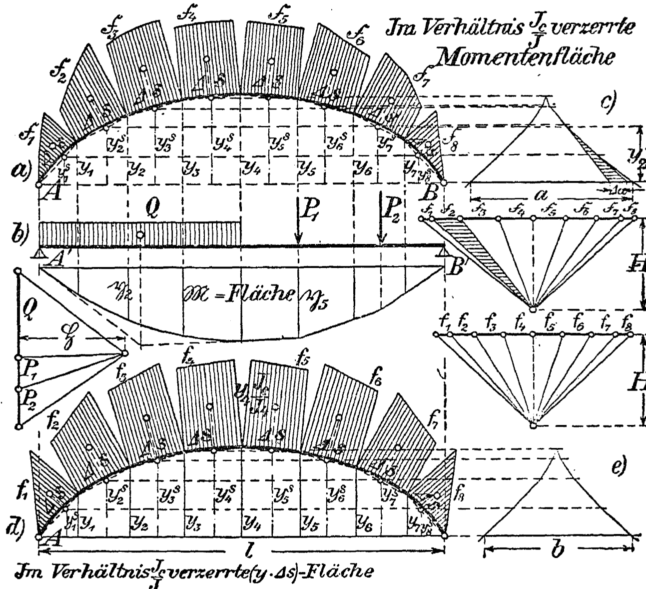


Fig. 71.

Schwerpunkt des entsprechenden Δs angreift, und zeichnet dazu das Kraft- und Seileck (Fig. 71c), so ergibt sich das statische Moment der ΣF in bezug auf die Kämpferverbindungslinie. Aus den schraffierten Dreiecken der Fig. 71c folgt

$F_2 : H' = \Delta a : y_2^s$ oder $H' \cdot \Delta a = F_2 \cdot y_2^s$ und für alle F gilt

$H' \cdot a = \sum_0^1 F \cdot y_s$; dies ist der Zähler der Gl. (98a).

Setzt man das erste Glied des Nenners in Gl. (98a)

$$\sum_0^1 y_s^2 \frac{J_c}{J} \varDelta s = \sum_0^1 y_s \frac{J_c}{J} \varDelta s \cdot y_s = \sum_0^1 f \cdot y_s,$$

so kann es in derselben Weise wie der Zähler graphisch berechnet werden, man hat lediglich die F mit $f = y_s \frac{J_c}{J} \varDelta s$ zu vertauschen (Fig. 71d), und es wird nach Fig. 71e

$$H' \cdot b = \Sigma f \cdot y_s,$$

wobei dieselbe Polweite H′ wie in Fig. 71c zu nehmen ist. Das zweite Glied des Nenners wird nach Gl. (99) berechnet. Mit vorstehenden Werten folgt schließlich

$$(100) \qquad H = \frac{H'a}{H'b + c} = \frac{a}{b + \frac{c}{H'}} = \frac{a}{b + \beta}.$$

Hierbei sind aber die Maßstäbe sorgfältig zu beachten. Ist die Längeneinheit für Fig. 71e gleich e, so muß dieselbe Strecke in Fig. 71c gleich e · H Einheiten (Momente) sein ($\varDelta s = 1$).

Nachdem H festgelegt ist, wird am zweckmäßigsten, gemäß Teil I, § 34 u. 38, eine Stützlinie in den Bogen gezeichnet, die dann sofort alle Normalkräfte N bzw. alle Momente $M = N \cdot f$ liefert, wenn f der Abstand der Normalkraft N von der Schwerachse der fraglichen Querschnitte ist (vgl. I. Teil, S. 138). Bezüglich der Auflagerkräfte vgl. S. 147.

§ 31. Der Zweigelenkbogen mit beweglicher Belastung.

Die Untersuchung ist in diesem Fall mittels Einflußlinien durchzuführen. Für eine wandernde, lotrechte Einzellast P = 1 t wird die M-Fläche des statisch bestimmt gemachten Bogens immer ein Dreieck (Fig. 72) wie beim einfachen Träger. Für einen Schnitt zwischen der Last und dem

Auflager A wird $\mathfrak{M}_x = 1 \cdot \frac{bx}{l}$, und für einen Schnitt zwischen der Last P und dem Auflager B gilt $\mathfrak{M}_z = 1 \cdot \frac{az}{l}$.

a) Einflußlinie für den Horizontalschub H.

Setzt man vorstehende Werte in Gl. (98) ein, so folgt für P = 1 t

Fig. 72.

$$H = \frac{\int_0^a 1 \cdot \frac{bx}{l} y \frac{ds}{J} + \int_0^b 1 \cdot \frac{az}{l} y \frac{ds}{J}}{\int_0^l y^2 \frac{ds}{J} + \int_0^l \frac{ds}{F}}.$$

Führt man auch noch ein unveränderliches Trägheitsmoment J_c und die endliche Länge Δs ein, so wird

$$(101) \quad \begin{cases} H = \dfrac{\frac{b}{l}\int_0^a x \frac{J_c}{J} y\, ds + \frac{a}{l}\int_0^b z \frac{J_c}{J} y\, ds}{\int_0^l y \frac{J_c}{J} y\, ds + \int_0^l \frac{J_c}{F} ds} \\[2ex] \quad = \dfrac{\frac{b}{l}\sum_0^a x \frac{J_c}{J} y \Delta s + \frac{a}{l}\sum_0^b z \frac{J_c}{J} y \Delta s}{\sum_0^l y \frac{J_c}{J} y \Delta s + \sum_0^l \frac{J_c}{F} \Delta s}. \end{cases}$$

Vergleicht man den Zähler dieses Ausdrucks mit Gl. (54), S. 61, so erkennt man, daß er die Biegungslinie eines einfachen Trägers darstellt, der mit den lotrechten elastischen Gewichten $w = \frac{J_c}{J} y \Delta s$ belastet ist. Mit diesen Gewichten kann die Biegungslinie gemäß § 14 b als Seileck gezeichnet

werden. Weiter ist der erste Ausdruck des Nenners in Gl. (101) das statische Moment derselben, aber wagerecht gedrehten elastischen Gewichte $w = \frac{J_c}{J} y \Delta s$ in bezug auf die Kämpferverbindungslinie AB, das ebenfalls durch ein Seileck bestimmt

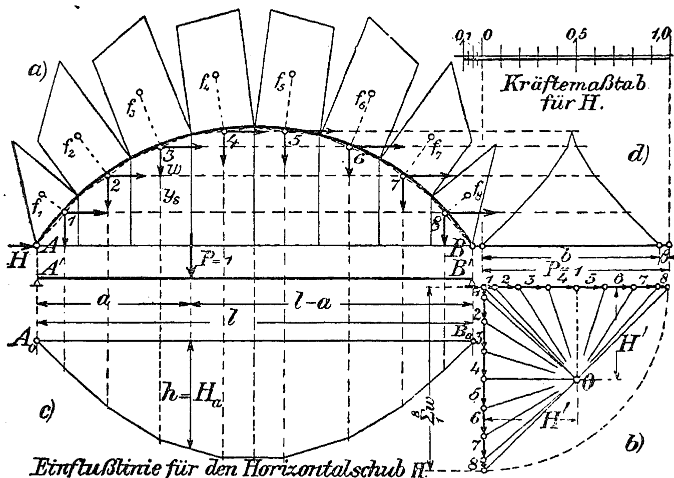


Fig. 73.

werden kann. Für beide Seilecke wird man denselben Kräftemaßstab und die gleiche Polweite H′ wählen (Fig. 73), und es folgt

$$M_w = \frac{b}{l}\sum_0^a x \cdot w + \frac{a}{l}\sum_0^b z\,w = H' \cdot h \text{ bzw. } \sum_0^l y \cdot w = H' \cdot b\,.$$

Setzt man wieder nach Gl. (99)

$$\sum_0^l \frac{J_c}{F} \Delta s = \frac{J_c}{F_m} B = c\,,$$

so wird

$$(102) \qquad H = \frac{H' \cdot h}{H' \cdot b + c} = \frac{h}{b + \frac{c}{H'}} = \frac{h}{b + \beta}.$$

Verlängert man nun die Strecke b (Fig. 73d) um $\beta = \frac{J_c B}{F_m H'}$ und nimmt die Länge $b + \beta$ als Krafteinheit an (= 1), so ist das in beliebigem Maßstab zu den elastischen Gewichten w gezeichnete Seileck die Einflußlinie des Horizontalschubes H. Bei unveränderlichem J und gleichlangen Δs können die $w = y_s$ gesetzt werden.

b) Einflußlinien der Momente, Quer- und Normalkräfte.

Nachdem die Einflußlinie für den Horizontalschub gefunden ist, sind alle übrigen Einflußlinien wie beim Dreigelenkbogen zu zeichnen (vgl. § 8).

c) Die Kämpferdrucklinie.

Sobald der Horizontalschub H gefunden ist, kann die Kämpferdrucklinie bestimmt werden, die auch hier die gleiche Bedeutung hat wie beim Dreigelenkbogen (vgl. § 8, 2b, S. 38). Nach Fig. 74 gilt

$$\operatorname{tg}\psi = \frac{\eta}{a} = \frac{A}{H},$$

$$(103) \qquad \eta = \frac{A \cdot a}{H}.$$

Für die wandernde Einzellast P = 1 t ist aber

$$A = \frac{1 \cdot b}{l} = \frac{1(l - a)}{l},$$

während H der Einflußlinie in Fig. 73 entnommen werden

kann, also

(103a) $$\eta = \frac{a(l-a)}{H}.$$

Ist der Zweigelenkbogen nach einer mathematisch festgelegten Kurve gekrümmt, so kann auch H zum voraus berechnet werden. Für einen parabelförmigen Bogen, der eine Einzellast P = 1 t trägt, erhält man aus Gl. (98), S. 138 mit dem Mittelwert J'

(104) $$H = \frac{5a(l-a)(l^2+al-a^2)}{8fl^3\left(1+\frac{15}{8}\frac{J'}{Ff^2}\right)} = \frac{5a(l-a)(l^2+al-a^2)}{8fl^3}\cdot\nu,$$

wenn

$$\nu = \frac{1}{1+\frac{15}{8}\frac{J'}{Ff^2}}$$

gesetzt wird; der Wert ν ist nur bei flachen Bogenträgern von Bedeutung

Mit Gl. (104) folgt aus Gl. (103 a)

(105) $$\eta = \frac{8fl^3}{5(l^2+al-a^2)}\cdot\frac{1}{\nu}.$$

Durch diese Gleichung ist die schwach gekrümmte Kämpferdrucklinie A_1B_1 (Fig. 74) festgelegt. Setzt man schließlich näherungsweise $\frac{5}{8}(l^2+al-a^2) = \frac{3}{4}l^2$, so folgt

(105a) $$\eta = \frac{4}{3}f\cdot\frac{1}{\nu},$$

und die Kämpferdrucklinie wird eine zur Kämpferverbindungslinie AB parallele Gerade. Der zugehörige Horizontalschub beträgt

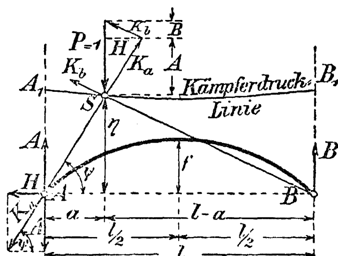


Fig. 74.

(106) $$H = \frac{3}{4}\frac{a(l-a)}{fl}\cdot\nu,$$

und hiermit ergibt sich eine parabelförmige Einflußlinie (bei parabelförmigem Bogen) mit der Pfeilhöhe

(106 a) $$H_m = \frac{3}{16}\frac{l}{f}\cdot\nu,$$

die bei praktischen Untersuchungen häufig angewendet wird.

Für eine Einzellast P = 1 t können, wie Fig. 74 zeigt, mit Hilfe der Kämpferdrucklinie zu jeder Laststellung die Kämpferdrücke K_a und K_b, der Horizontalschub H sowie die Auflagerdrücke A und B gefunden werden.

XII. Abschnitt.

Der Zweigelenkfachwerkbogen.

§ 32. Der Zweigelenkfachwerkbogen mit ruhender Belastung.

Der Zweigelenkfachwerkbogen AB (Fig. 75) ist ebenfalls einfach statisch unbestimmt, als statisch unbestimmte Größe wird wieder der Horizontalschub H gewählt, den man am einfachsten nach dem Prinzip der virtuellen Verschiebungen ermittelt (vgl. § 25, S. 118).

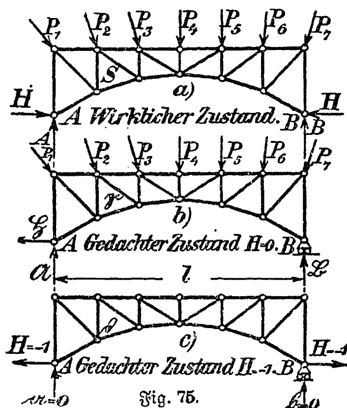


Fig. 75.

Durch die äußere Belastung erfährt der Bogen AB (Fig. 75a) die wirklichen Stabspannungen S. Wird ein Kämpfer frei beweglich gemacht (Fig. 75 b), so entsteht ein einfacher Träger, der von der äußeren Belastung die Stabspannungen 𝔖 (Cremonaplan) und die Auflagerwiderstände 𝔄, 𝔅 und ℌ erhält. Bringt man nun an den Kämpfern des Bogenträgers eine Kraft H = —1 an (Fig. 75 c), so entstehen die Stabspannungen $\mathfrak{s}$, jedoch keine Auflagerkräfte. Mit den gefundenen Stabspannungen wird nach § 18 die gegenseitige Verschiebung der Kämpfer $\delta_k' = \sum \mathfrak{s} \Delta s = \sum \frac{\mathfrak{s}\,\mathfrak{S}\,s}{EF}$. Wirkt nun der wirkliche Horizontalschub H auf den Bogen ein, so entstehen die

Stabspannkräfte $\mathfrak{z} \cdot (-H)$ und die entsprechende Verschiebung der Kämpfer wird $\delta_k'' = \sum \mathfrak{z} \Delta s = -H \sum \frac{\mathfrak{z}^2 s}{EF}$. Die wirkliche Verschiebung ist bei starren Widerlagern gleich Null, also

$$\delta_k = 0 = \delta_k' + \delta_k'' = \sum \frac{\mathfrak{z} \mathfrak{S} s}{EF} - H \sum \frac{\mathfrak{z}^2 s}{EF},$$

und hieraus folgt, bei überall gleichem Baustoff mit $E = 1$,

(107) $$H = \sum \frac{\mathfrak{z} \mathfrak{S} s}{F} : \sum \frac{\mathfrak{z}^2 s}{F}.$$

Bei veränderlichen Querschnitten wird F_c eingeführt, also

(107a) $$H = \sum \mathfrak{z} \mathfrak{S} s \frac{F_c}{F} : \sum \mathfrak{z}^2 s \frac{F_c}{F}.$$

(Vgl. § 25, S. 119.) Dieser Ausdruck ist wie früher mittels Tabelle (vgl. S. 82) zu berechnen. Die wirklichen Stabkräfte werden, sobald H gefunden ist,

(108) $$S = \mathfrak{S} - \mathfrak{z} H,$$

und die Auflagerkräfte betragen

(109) $$H_a = -\mathfrak{H} + H \quad \text{und} \quad H_b = H, \quad A = \mathfrak{A} \quad \text{und} \quad B = \mathfrak{B}.$$

Durch Temperaturänderungen entsteht [vgl. Gl. (97), S. 137]

(110) $$H_t = E \omega t l F_c : \sum \mathfrak{z}^2 s \frac{F_c}{F}.$$

§ 33. Der Zweigelenkfachwerkbogen mit beweglicher Belastung.

Hier kommen nur Einflußlinien in Frage.

a) Einflußlinie für den Horizontalschub H (Fig. 76).

Für die Spannweitenänderung eines Zweigelenkfachwerkbogens folgt aus Gl. (93), S. 135 mit $x_0 = 0$, $x_1 = l$, $y_0 = y_1 = 0$

$$\Delta l = \sum_0^l \frac{M y s}{E F h^2}.$$

Hier ist ebenso wie beim vollwandigen Bogenträger $M = \mathfrak{M} - H \cdot y$, wobei die Momente $\mathfrak{M}$ dem statisch bestimmt gemachten Bogenträger zugehören. Für lotrechte Belastung stimmen die $\mathfrak{M}$ mit denjenigen eines einfachen Trägers AB überein. Setzt man noch

durchgehends gleichen Baustoff voraus, so folgt

$$E\Delta l = \sum_0^l (\mathfrak{M} - H y) \frac{y s}{E F h^2}.$$

(111)
$$H = \frac{-E\Delta l + \sum_0^l \mathfrak{M} y \frac{s}{F h^2}}{\sum_0^l y^2 \frac{s}{F h^2}}.$$

Für eine wandernde Einzellast $P = 1$ t ist die $\mathfrak{M}$-Fläche in Fig. 72, S. 142 gegeben, für eine bestimmte Laststellung folgt daraus $\mathfrak{M}_x = 1 \cdot \frac{b \cdot x}{l}$ und $\mathfrak{M}_z = 1 \cdot \frac{a \cdot z}{l}$. Diese Werte, in Gl. (111) eingesetzt, liefern für starre Widerlager ($\Delta l = 0$)

(111 a)
$$H = \frac{\sum_0^a \frac{b x}{l} y \frac{s}{F h^2} + \sum_0^b \frac{a z}{l} y \frac{s}{F h^2}}{\sum_0^l y^2 \frac{s}{F h^2}}.$$

Führt man noch ein unveränderliches F_c ein, um den wechselnden Stabquerschnitten Rechnung zu tragen, so wird

(112)
$$\left\{ \begin{aligned} H &= \frac{\frac{b}{l}\sum_0^a x \cdot \left(y \frac{F_c}{F} \frac{s}{h^2}\right) + \frac{a}{l}\sum_0^b z \cdot \left(y \frac{F_c}{F} \frac{s}{h^2}\right)}{\sum_0^l y \cdot \left(y \frac{F_c}{F} \frac{s}{h^2}\right)} \\ &= \frac{Z}{N} = \frac{M_\varrho}{St_\varrho}. \end{aligned} \right.$$

Vergleicht man den Zähler dieses Ausdrucks mit Gl. (54), so zeigt sich, daß er die Biegungslinie eines einfachen Trägers A'B' (Fig. 76 b) darstellt, der mit den elastischen Gewichten $\varrho = y \frac{F_c}{F} \frac{s}{h^2}$ lotrecht belastet ist. Mit diesen Gewichten kann somit die Biegungslinie gemäß § 14 b als Seileck ge-

zeichnet werden. Ferner stellt der Nenner in Gl. (112) das statische Moment derselben, aber wagerecht gedrehten Gewichte in bezug auf die Kämpferverbindungslinie AB (Fig. 76 a) dar, das ebenfalls durch ein Seileck bestimmt werden kann. Wählt man für beide Seilecke denselben Kräftemaßstab

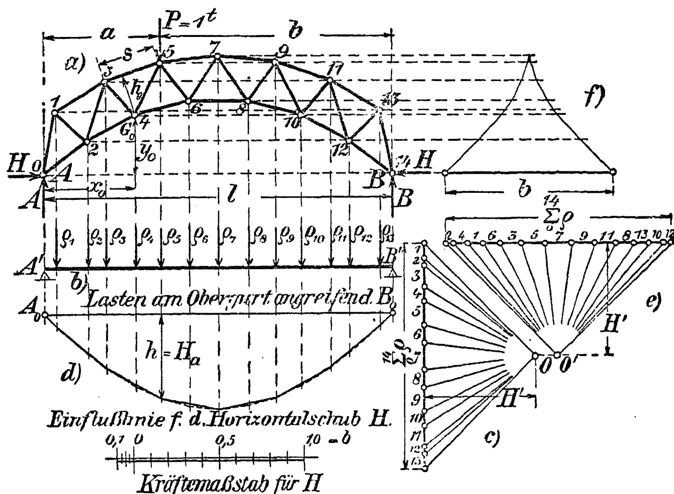


Fig. 76.

und die gleiche Polweite H′ (Fig. 76 c u. e), so wird für eine beliebige Laststellung Z = H′ · h und N = H′ · b (Fig. 76 f), mithin

$$(112\,a)\qquad H = \frac{Z}{N} = \frac{H' \cdot h}{H' \cdot b} = \frac{h}{b},$$

und wenn man b zur Einheit des Kräftemaßstabes für H nimmt, also b = 1 setzt, stellt die in Fig. 76 d gegebene Biegungslinie die Einflußlinie des Horizontalschubes H

dar. Ist nur ein Gurt belastet, so muß in die gefundene Einflußlinie noch ein Vieleck eingezeichnet werden, das den belasteten Knotenpunkten entspricht, wie Fig. 76 d zeigt, wobei der Obergurt belastet ist. Bei lotrechten Wandstäben sind die übereinander fallenden ϱ zu summieren. Die Konstruktion der Einflußlinie ist wie in Fig. 73 durchzuführen; nur sei erwähnt, daß es vorteilhaft ist, bei der Bestimmung von N einen besonderen Kräftezug für die ϱ zu zeichnen, in solcher Reihenfolge wie die ϱ wagerecht übereinander liegen, weil sich sonst das Seileck überschneidet und ungenau wird.

Schließlich sei bemerkt, daß das in § 25 b angewendete Verfahren auch hier schnell zum Ziel führt, wenn man die Last $P_m = 1$ über den Bogenträger wandern läßt und eine Kraft $H = -1$ an den Kämpfern des statisch bestimmt gemachten Bogens anbringt; es ergibt sich dann sofort für starre Widerlager

(113) $$H = \frac{1 \cdot \delta_{mb}}{\delta_{bb}} = \frac{\eta_m}{\delta_{bb}},$$

wobei die η_m die Ordinaten der Biegungslinie in Fig. 76d und δ_{bb} den Wert b in Fig. 76 f darstellt.

b) Einflußlinien für die Stabkräfte.

Nachdem die Einflußlinie für den Horizontalschub H bestimmt ist, können alle übrigen Einflußlinien wie beim Dreigelenkfachwerkbogen gefunden werden (vgl. § 11). Auch hier läßt sich die Kämpferdrucklinie darstellen wie in § 31 c.

XIII. Abschnitt.

Die eingespannten vollwandigen und fach-werkartigen Bogenträger.

§ 34. Grundformeln für den eingespannten vollwandigen Bogen mit ruhender Belastung.

Der eingespannte Bogen AB (Fig. 77 a) ist dreifach statisch unbestimmt (vgl. I. Teil, § 35). Durch Beseitigung von drei entsprechenden Stützstäben kann er in einen einfachen gebogenen Träger AB (Fig. 77 b) verwandelt werden, für den die Momente 𝔐 und die Normalkräfte 𝔑 in bekannter Weise bestimmt werden können. Als statisch unbestimmte Größen werden hier der Horizontalschub H und die Einspannmomente M′ und M″ gewählt (Fig. 77 c). Zwischen letzteren besteht die Beziehung

$$(114)\qquad M' - M'' + Gl = 0 \quad \text{oder} \quad G = \frac{M'' - M'}{l},$$

wenn G den Einfluß der Einspannmomente auf die Auflagerkräfte angibt. Mit den vorstehenden Größen wird das Moment und die Normalkraft an der beliebigen Stelle C des Bogens (Fig. 77 a)

$$(115)\qquad \begin{cases} M = \mathfrak{M} + M' + G \cdot x - H \cdot y, \\ N = \mathfrak{N} + G \sin\varphi + H \cos\varphi. \end{cases}$$

Für die Auflagerkräfte gilt

$$(116)\qquad \begin{cases} A = \mathfrak{A} + G \quad \text{bzw.} \quad B = \mathfrak{B} - G, \\ H_a = -\mathfrak{H} + H \quad \text{bzw.} \quad H_b = H. \end{cases}$$

Die Auflagerwiderstände G, H und M′ bzw. G, H und M″ lassen sich durch die exzentrisch angreifende Mittelkraft,

$R' = R'' = \sqrt{G^2 + H^2}$ ersetzen, wenn die Exzentrizität $c' = \frac{M'}{H}$ bzw. $c'' = \frac{M''}{H}$ gemacht wird (Fig. 77 d).

Die statisch unbestimmten Größen hängen von den Formänderungen des Bogens ab, die durch die Elastizitätsgleichungen auf S.130 bestimmt sind. Aus den Gl. (88), (89) und (90) erhält man mit $x_0 = 0$, $x_1 = l$, $y_0 = 0$ und $y_1 = 0$ für den Verdrehungswinkel der Endquerschnitte des Bogens

(117) $$\Delta(\varphi_1 - \varphi_0) = \int_0^l \frac{M\,ds}{EJ},$$

für die lotrechte Verschiebung der Endquerschnitte

(118) $$\Delta y = l\int_0^l \frac{M\,ds}{EJ} - \int_0^l \frac{M x}{EJ} ds + \int_0^l \frac{N\,dy}{EF}$$

und für die Spannweitenänderung

(119) $$\Delta l = \int_0^l \frac{M y}{EJ} ds + \int_0^l \frac{N\,dx}{EF}.$$

Setzt man schließlich starre Widerlager voraus, so folgt

(120) $$\left\{\begin{aligned} 0 &= \int_0^l \frac{M\,ds}{EJ}, \\ 0 &= \int_0^l \frac{M x}{EJ} ds - \int_0^l \frac{N\,dy}{EF}, \\ 0 &= \int_0^l \frac{M y}{EJ} ds + \int_0^l \frac{N\,dx}{EF}. \end{aligned}\right.$$

Der mittlere Wert folgt aus Gl. (118) und Gl. (117).

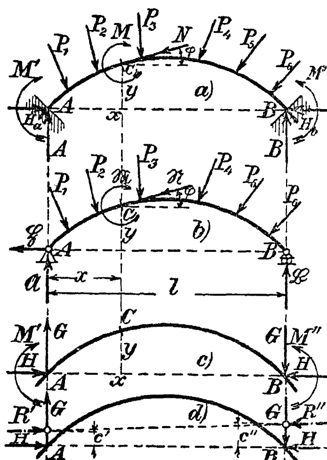


Fig. 77.

Die erste Gleichung aus (115) in Gl. (120) eingeführt ergibt mit durchgehends gleichem E, wenn gleichzeitig noch $dy = ds \cdot \sin\varphi$ und $dx = ds \cdot \cos\varphi$ gesetzt sowie N als Druckkraft (negativ) eingeführt wird,

$$0 = \int_0^l (\mathfrak{M} + M' + G \cdot x - H \cdot y) \frac{ds}{J},$$

$$0 = \int_0^l (\mathfrak{M} + M' + G \cdot x - H \cdot y) \frac{x\,ds}{J} + \int_0^l \frac{N \sin\varphi\, ds}{F},$$

$$0 = \int_0^l (\mathfrak{M} + M' + G \cdot x - H \cdot y) \frac{y\,ds}{J} - \int_0^l \frac{N \cos\varphi\, ds}{F}$$

Die Normalkräfte N können bei großen Pfeilhöhen vernachlässigt werden und bei kleinen (flache Bögen) genügt es zu setzen $N \cdot \cos\varphi = H$ und $N \cdot \sin\varphi = 0$.

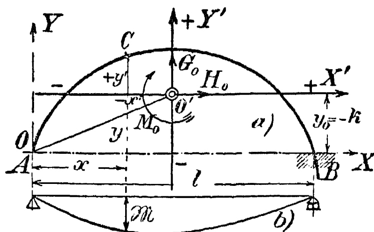


Fig. 78.

Belastet man nun die Bogenachse mit den elastischen Gewichten $w = \frac{ds}{J}$ und verschiebt den im linken Kämpfer (Fig. 78) liegenden Koordinatenursprung O mit samt den dort wirkenden Widerständen G, H und M' in den Schwerpunkt O' der elastischen Gewichte, wobei diese nunmehr an dem Arm OO' wirkenden Größen in G_0, H_0 und M_0 übergehen, so lassen sich die obigen Gleichungen in einfacher Weise lösen. Die Lage des Punktes O' ist

bestimmt durch

(121) $\int_0^l y \frac{ds}{J} = 0, \quad \int_0^l x \frac{ds}{J} = 0$ und $\int_0$

und hiermit erhält man für die laufenden K

(122)
$$\begin{cases} 0 = \int_{-l/2}^{+l/2} \mathfrak{M} \frac{ds}{J} + M_0 \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{ds}{J} \text{ oder } M_0 = - \\ 0 = \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{\mathfrak{M} x' ds}{J} + G_0 \int_{-l/2}^{+l/2} x'^2 \frac{ds}{J} \text{ oder } G_0 = \\ 0 = \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{\mathfrak{M} y' ds}{J} - H_0 \int_{-l/2}^{+l/2} y'^2 \frac{ds}{J} - H_0 \int_{-l/2}^{+l} \frac{ds}{F} \\ H_0 = \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{\mathfrak{M} y' ds}{J} : \int_{-l/2}^{+l/2} y'^2 \frac{ds}{J} + \int_{-l/2}^{+l/2} \frac{ds}{F}. \end{cases}$$

Hierbei beziehen sich die $\mathfrak{M}$ auf einen einfac
ten Träger (Fig. 78 b gilt für lotrechte Belastu
Führt man nun, um der Veränderlichkeit de
nung zu tragen, ein gleichbleibendes J_c ein und
endliche Länge Δs, so folgt

(123a) $$M_0 = -\sum_{-l/2}^{+l/2} \mathfrak{M} \frac{J_c}{J} \Delta s : \sum_{-l/2}^{+l/2} \frac{J_c}{J}$$

(123b) $$G_0 = -\sum_{-l/2}^{+l/2} \mathfrak{M} \frac{J_c}{J} \Delta s \cdot x' : \sum_{-l/2}^{+l/2} x'^2 -$$

(123c) $$H_0 = +\sum_{-l/2}^{+l/2} \mathfrak{M} \frac{J_c}{J} \Delta s \cdot y' : \left[\sum_{-l/2}^{+l/2} y'^2 \frac{J_c}{J} \right.$$

Bei symmetrischem Bogen ergibt sich der Sch

schen Gewichte nach Gl. (121) aus $\int_0^l y \frac{ds}{J} = 0,$

nach Einführung von J_c und Δs bzw. $w = \frac{J_c}{J} \Delta s$ (Fig. 78a)

$$(124) \qquad y_0 = -k = \frac{\sum_0^1 y \frac{J_c}{J} \Delta s}{\sum_0^1 \frac{J_c}{J} \Delta s} = \frac{\sum_0^1 y \cdot w}{\sum_0^1 w}.$$

Für jede beliebige ruhende Belastung können die statisch unbestimmten Größen nach Gl. (123) und (124) mittels Tabelle (vgl. S. 139) berechnet werden, worauf sich die übrigen Größen aus den Gl. (115) und (116) ergeben. Z. B. folgt für das Moment am linksseitigen Kämpfer (Einspannmoment) mit $\mathfrak{M}_0 = 0$

$$(125) \qquad M' = M_0 - G_0 \cdot \frac{1}{2} + H_0 \cdot k \quad \text{und} \quad c' = \frac{M'}{H_0};$$

ferner wird das Moment im Bogenscheitel

$$(125a) \qquad M_s = \mathfrak{M}_s + M_0 - H_0 \cdot y_s' \quad \text{und} \quad c_s = \frac{M_s}{H_0}.$$

Mit den äußeren Kräften und den Werten c kann die Drucklinie in den Bogen gezeichnet werden, die sofort alle Normalkräfte N und Momente $M = N \cdot f$ liefert (vgl. I. Teil, § 34).

Sollen die Momente berechnet werden, so folgt für eine beliebige Stelle C (Fig. 78)

$$(125b) \qquad M_c = \mathfrak{M}_c + M_0 - G_0 x' - H_0 \cdot y'.$$

§ 35. Der eingespannte Vollwandbogen mit beweglicher Belastung.

Hierbei kommen nur Einflußlinien in Frage, und zwar sind zunächst diejenigen für die statisch unbestimmten Größen zu ermitteln, unter Benutzung der Gl. (123).

1. Schwerpunkt O′ der elastischen Gewichte für symmetrische Bogen.

Nach Gl. (124) wird $y_0 = \sum_0^l y \cdot w : \sum_0^l w$, wobei $w = \frac{J_c}{J} \Delta s$. Trägt man (Fig. 79b) $\frac{1}{2}\Sigma w$ als wagerechten Kräftezug in beliebigem Maßstab auf, zeichnet dazu mit beliebiger Polweite H′ ein Krafteck und parallel zu dessen Strahlen in Fig. 79a ein Seileck (Fig. 79c), so schneiden dessen äußerste Seiten die Höhe y_0 ab, und damit ist das Achsenkreuz X′, Y′ bzw. dessen Pol O′ festgelegt. Nimmt man insbesondere die Polweite $H' = \frac{1}{2}\Sigma w$, so schneidet das zugehörige Seileck (Fig. 79c) auf der verlängerten Kämpferverbindungslinie AB die Strecke a ab und es ist $a \cdot H' = a \cdot \frac{1}{2}\Sigma w = M_w = \frac{1}{2}\Sigma y \cdot w$ oder $a = \frac{1}{2}\Sigma y w : \frac{1}{2}\Sigma w$, hieraus folgt $a = y_0$ und man braucht a nur umzuklappen, um y_0 zu erhalten (Fig. 79c).

2. Einflußlinie für M_0.

Für eine wandernde Einzellast P = 1 t wird nach Fig. 72 (S. 142) $\mathfrak{M}_x = 1 \cdot \frac{b\,x}{l}$ und $\mathfrak{M}_z = 1 \cdot \frac{a\,z}{l}$. Führt man diese Werte in Gl. (123a) ein, so folgt

$$M_0 = -\left[\sum_0^a \frac{b\,x}{l} \frac{J_c}{J} \Delta s + \sum_0^b \frac{a\,z}{l} \frac{J_c}{J} \Delta s\right] : \sum_0^l \frac{J_c}{J} \Delta s,$$

und wenn wieder $\frac{J_c}{J} \Delta s = w$ gesetzt wird

$$M_0 = -\left[\frac{b}{l} \sum_0^a w \cdot x + \frac{a}{l} \sum_0^b w \cdot z\right] : \sum_0^l w \quad \text{oder}$$

(126) $$M_0 = -\frac{M_w}{\sum_0^l w}.$$

Die Einflußlinie für M_0 ist somit als Seileck (Momentenlinie eines einfachen Trägers) zu den elastischen Gewichten

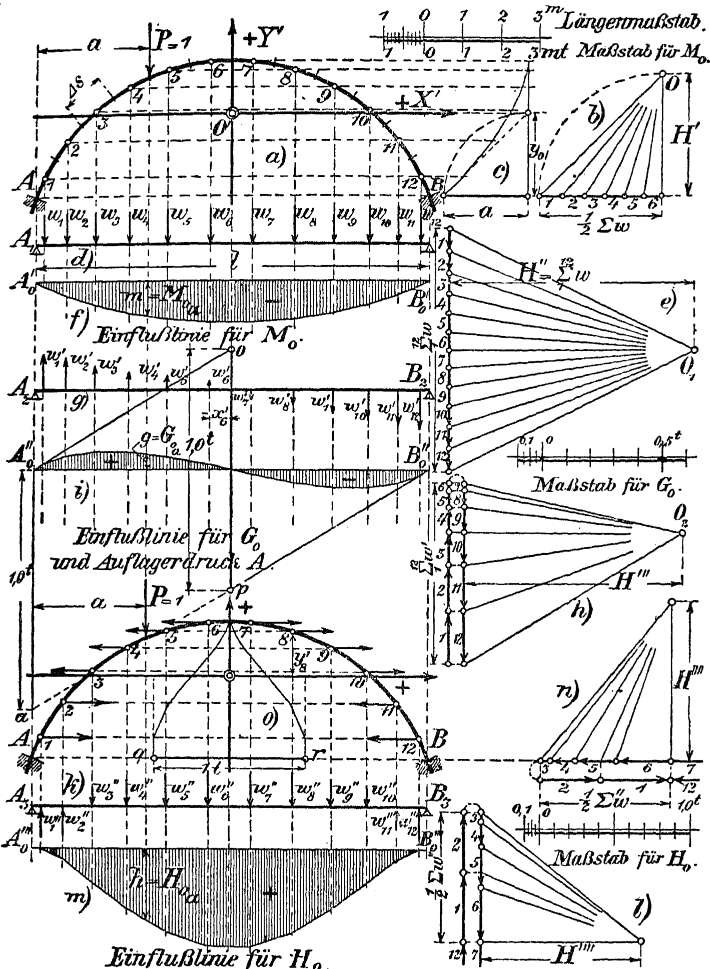

Längenmaßstab.
Maßstab für M_o.
Einflußlinie für M_o.
Maßstab für G_o.
Einflußlinie für G_o
und Auflagerdruck A.
Maßstab für H_o.
Einflußlinie für H_o.

Fig. 79.

w zu zeichnen, wobei $\frac{1}{\Sigma w}$ eine Veränderungsziffer darstellt (vgl. S. 122).

Setzt man auf den einfachen Träger A_1B_1 (Fig. 79 d), dessen Länge l gleich der Bogenspannweite ist, die Gewichte w, vereinigt sie zu einem Kräftezug $\sum_1^{12} w$ (Fig. 79 e), mit der Polweite $H'' = \sum_1^{12} w$, und zeichnet parallel zu dessen Polstrahlen unter A_1B_1 ein Seileck (Fig. 79 f), so gilt für eine beliebige Stellung a der Last $P = 1$ t, zu der die Seileckordinate m gehört, $m \cdot H'' = m \sum_1^{12} w = M_w$. Wird dieser Wert in Gl. (126) eingesetzt, so folgt

$$(126a) \qquad M_0 = -\frac{m \sum_1^{12} w}{\sum_1^{12} w} = -m\,.$$

Die Ordinaten m stellen also direkt die Momente M_0 dar. Die Kräfte fallen in Gl. (126a) heraus, mithin ist **m** auf dem Längenmaßstab zu messen, dessen Einheiten für m als Momente gelten. Hätte man $H'' = \frac{1}{n} \sum_1^{12} w$ genommen, dann würden n Einheiten des Längenmaßstabes eine Einheit für das Moment darstellen.

3. Einflußlinie für G_0.

Führt man die für $P = 1$ t geltenden Werte $\mathfrak{M}_x = 1 \cdot \frac{b\,x}{l}$ und $\mathfrak{M}_z = 1 \cdot \frac{a\,z}{l}$ in Gl. (123b) ein, so folgt

$$G_0 = -\left[\sum_0^a \frac{b\,x}{l} \frac{J_c}{J} \Delta s x' + \sum_0^b \frac{a\,z}{l} \frac{J_c}{J} \Delta s x'\right] : \sum_0^l x'^2 \frac{J_c}{J} \Delta s,$$

und wenn $\frac{J_c}{J} \Delta s \cdot x' = w'$ gesetzt wird,

$$G_0 = -\left[\frac{b}{l}\sum_0^a w' \cdot x + \frac{a}{l}\sum_0^b w' \cdot z\right] : \sum_0^l w' \cdot x' \quad \text{oder}$$

(127) $$G_0 = -\frac{M_{w'}}{\sum_0^l w' \cdot x'}.$$

Der Zähler dieses Ausdrucks stellt das Moment eines einfachen Trägers A_2B_2 (Fig. 79 g) dar, der mit den elastischen Gewichten w' belastet ist, die teils positiv, teils negativ sind. Setzt man diese Werte w' zu einem Kräftezug $\sum_1^{12} w'$ (Fig. 79 h) zusammen und zeichnet dazu mit beliebiger Polweite H''' ein Seileck (Fig. 79 i), so gilt für eine beliebige Stellung der Last $P = 1$ t, der die Ordinate g zugehört, $g \cdot H''' = M_{w'}$. Verlängert man die äußersten Seileckseiten (Fig. 79 i), so schneiden sie auf der durch O' gehenden Lotrechten (Achse Y') eine Strecke $\overline{op}$ ab und es ist $\overline{op} \cdot H''' = \sum_1^{12} w'x'$ das statische Moment der Kräfte w' in bezug auf Y'; dies ist aber der Nenner der Gl. (127). Setzt man diesen und den vorhergehenden Wert in Gl. (127) ein, so folgt

(127 a) $$G_0 = -\frac{g \cdot H'''}{\overline{op} \cdot H'''} = -\frac{g}{\overline{op}} = -g,$$

wenn man die Strecke $\overline{op}$ gleich der Krafteinheit macht; also ist Fig. 79 i die Einflußlinie für G_0 mit dem Maßstab $\overline{op} = 1$. Soll die Tragwerkslinie $A_0''B_0''$ wagerecht werden, so lege man den Pol O_2 so, daß die den von der X'-Achse getroffenen Gewichten zugehörenden Strahlen wagerecht liegen.

4. Einflußlinien der Auflagerdrücke.

Nach Gl. (116) ist $A = \mathfrak{A} + G$ und $B = \mathfrak{B} - G$. Diese Werte ergeben sich sofort aus Fig. 79 i, wenn man die Linien

$B_0''p$ bzw. $A''o$ bis zu den Auflagerlotrechten verlängert. Für A ist $A_0''a = 1 = \overline{op}$.

5. Einflußlinie für H_0.

Aus Gl. (123c) folgt mit $\mathfrak{M}_x = \frac{1 \cdot b\,x}{l}$ und $\mathfrak{M}_z = \frac{1 \cdot a\,z}{l}$ für P = 1 t

$$H_0 = \left[\sum_0^a \frac{b\,x}{l}\,\frac{J_c}{J}\,\Delta s \cdot y' + \sum_0^b \frac{a\,x}{l}\,\frac{J_c}{J}\,\Delta s \cdot y'\right]$$

$$: \left[\sum_0^l y'^2 \frac{J_c}{J}\,\Delta s + \sum_0^l \frac{J_c}{F}\,\Delta s\right],$$

und wenn $\frac{J_c}{J}\,\Delta s \cdot y' = w''$ gesetzt wird,

$$H_0 = \left[\frac{b}{l}\sum_0^a w'' \cdot x + \frac{a}{l}\sum_0^b w'' \cdot z\right] : \left[\sum_0^l w'' \cdot y' + c\right]$$

oder

(128) $$H_0 = \frac{M_{w''}}{\sum_0^l w'' \cdot y' + c},$$

wobei c aus Gl. (99) auf S. 139 entnommen ist.

Der Zähler dieses Ausdrucks bezeichnet das Moment eines einfachen Trägers A_3B_3 (Fig. 79 k), der mit den elastischen Gewichten w'' belastet ist, die abwechselnd positiv und negativ sind. Die Kräfte w'' werden zu einem Kräftezug $\Sigma w''$ mit der Polweite H'''' (Fig. 79 l) zusammengesetzt und dazu wird ein Seileck (Fig. 79 m) gezeichnet, das für eine beliebige Laststellung die Ordinate h liefert, und es gilt $h \cdot H'''' = M_{w''}$. Dreht man nun das Krafteck der w'' um 90° (Fig. 79 n) und läßt die Kräfte w'' wagerecht am Bogen selbst wirken, so kann zu diesen ein neues Seileck (Fig. 79 o) gezeichnet werden, das auf der Kämpferverbindungslinie AB die Strecke $\overline{qr}$ abschneidet, und es ist $\overline{qr} \cdot H'''' = \sum_1^{12} w'' \cdot y'$ das statische Moment

der Kräfte w'' in bezug auf die X'-Achse dies ist aber der Nenner in Gl. (128). Setzt man die gefundenen Werte in Gl. (128) ein, so ergibt sich unter Vernachlässigung der Normalkräfte

$$(128a)\qquad H_0 = \frac{h \cdot H''''}{\overline{qr} \cdot H''''} = \frac{h}{\overline{qr}} = h,$$

wenn man die Strecke $\overline{qr}$ gleich der Krafteinheit macht; also ist Fig. 79m die Einflußlinie für H_0 mit dem Maßstab $\overline{qr} = 1$. Sind die Normalkräfte N zu berücksichtigen, so ist $\overline{q} + \frac{c}{H''''} = 1$ zu machen (vgl. S. 144).

Es sei nochmals darauf hingewiesen, daß vorstehende Einflußlinien verschiedene Maßstäbe haben.

Handelt es sich um die Einflußlinie für das Moment in einem beliebigen Punkt C (Fig. 78), so ist die Einflußlinie gemäß Gl. (125 b) zu bilden, während sie für eine Normalkraft nach Gl. (115) zu bilden ist.

§ 36. Grundformeln für den eingespannten fachwerkartigen Bogenträger mit ruhender und beweglicher Belastung.

Der eingespannte Fachwerkbogenträger (Fig. 80) ist genau so zu behandeln wie der eingespannte Vollwandbogenträger, die Grundformeln zu seiner Berechnung folgen aus den Elastizitätsgleichungen auf S. 135. In derselben Weise wie im § 34 folgt aus den Gl. (92) bis (94) für starre Widerlager

$$(129)\qquad \begin{cases} 0 = \sum_0^1 \frac{Ms}{EFh^2}, \\ 0 = \sum_0^1 \frac{Mxs}{EFh^2}, \\ 0 = \sum_0^1 \frac{Mys}{EFh^2}. \end{cases}$$

Setzt man nun für einen beliebigen Gegenpunkt $M = \mathfrak{M} + M' + Gx - Hy$, nimmt durchgehends gleiches E an und führt, um der Veränderlichkeit der Stabquerschnitte zu genügen, ein unveränderliches F_c ein, so folgt

$$(130)\quad \begin{cases} 0 = \sum_0^l (\mathfrak{M} + M' + G \cdot x - H \cdot y) \frac{F_c}{F} \cdot \frac{s}{h^2}, \\ 0 = \sum_0^l (\mathfrak{M} + M' + G \cdot x - H \cdot y)\, x \frac{F_c}{F} \cdot \frac{s}{h^2}, \\ 0 = \sum_0^l (\mathfrak{M} + M' + G \cdot x - H \cdot y)\, y \frac{F_c}{F} \cdot \frac{s}{h^2}. \end{cases}$$

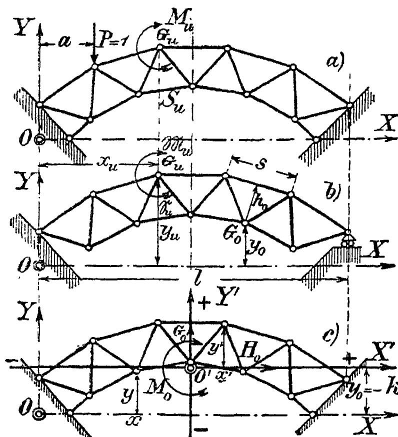


Fig. 80.

Bringt man nun in den Fachwerkknoten die elastischen Gewichte $\varrho = \frac{F_c}{F} \frac{s}{h^2}$ an und verlegt den Koordinatenursprung in ihren Schwerpunkt O', der durch

$$(131)\quad \sum_0^l y \frac{F_c}{F} \frac{s}{h^2} = 0, \quad \sum_0^l x \frac{F_c}{F} \frac{s}{h^2} = 0 \quad \text{und} \quad \sum_0^l xy \frac{F_c}{F} \frac{s}{h^2} = 0$$

bestimmt ist, so folgt für die Größen im Ursprung

$$(132)\quad \begin{cases} M_0 = -\sum\limits_{-1/2}^{+1/2} \mathfrak{M}\,\frac{F_c}{F}\,\frac{s}{h^2} : \sum\limits_{-1/2}^{+1/2} \frac{F_c}{F}\,\frac{s}{h^2}, \\ G_0 = -\sum\limits_{-1/2}^{+1/2} \mathfrak{M}\,\frac{F_c}{F}\,\frac{s}{h^2}\,x' : \sum\limits_{-1/2}^{+1/2} x'^2\,\frac{F_c}{F}\,\frac{s}{h^2}, \\ H_0 = +\sum\limits_{-1/2}^{+1/2} \mathfrak{M}\,\frac{F_c}{F}\,\frac{s}{h^2}\,y' : \sum\limits_{-1/2}^{+1/2} y'^2\,\frac{F_c}{F}\,\frac{s}{h^2}. \end{cases}$$

Diese Formeln entsprechen genau den Gl. (123), mithin sind auch hier die statisch unbestimmten Größen ebenso wie in Fig. 79 zu ermitteln, man hat lediglich die w durch die entsprechenden ϱ zu ersetzen.

XIV. Abschnitt.

Erddruck und Wasserdruck.

§ 37. Größe und Richtung des Erddrucks.

Jede lose aufgeschüttete Erdmasse böscht sich nach ihrem natürlichen Böschungswinkel ϱ ab. Soll eine Erdmasse (Fig. 81) durch eine steilere Böschung, unter dem Winkel β, begrenzt werden, so ist eine besondere Stützwand a b nötig. Bei dem Nachgeben der Wand wird aber die Erdmasse infolge Reibung und Kohäsion nicht nach der natür-

Fig. 81.

lichen Böschung ad, sondern nach einer steileren Fläche, der Gleitfläche ac, unter dem Winkel φ abrutschen. Der von dem Gewicht G des Erdkeils abc, dessen Tiefe gleich 1,0 sein möge, auf die Wand ab ausgeübte Druck heißt der Erddruck E. Die Richtung desselben ist unter dem

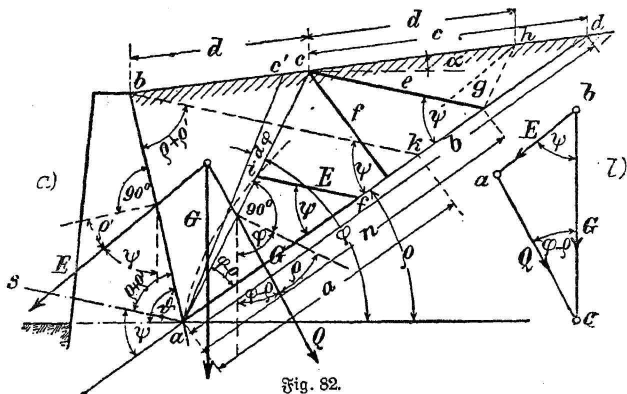


Fig. 82.

Reibungswinkel ϱ' gegen die Normale zur Wand ab geneigt. Die verbleibende Seitenkraft Q ist unter dem Winkel δ gegen die Normale zur Gleitfläche ac geneigt, dessen Grenzwert höchstens gleich ϱ werden kann.

Die Erdoberfläche sei unter einem Winkel α, der kleiner ist als ϱ, gegen die Wagerechte geneigt (Fig. 82a). Wird das Gewicht G des Erdkeils abc nach den Richtungen von E und Q zerlegt, so folgt aus dem Kräftedreieck in Fig. 82b, ohne Rücksicht auf Kohäsion,

(133) $$E = G \cdot \frac{\sin(\varphi - \varrho)}{\sin(\psi + \varphi - \varrho)}.$$

Macht man in Fig. 82a die Strecke af = G und zieht fi unter dem Winkel ψ gegen af geneigt, so ist Δ afi $\cong$ Δ abc (in Fig. 82b), folglich ist fi = E.

Die zu fi parallele Gerade as heißt Stellungslinie. Der Wert für E in Gl. (133) ist mit φ veränderlich, der Größtwert, dem

die stützende Wand ab Widerstand leisten muß, ergibt sich aus der Bedingung $\frac{dE}{d\varphi} = 0$. Man erhält hiernach

(134) $$-\frac{dG}{d\varphi}\sin(\varphi - \varrho)\sin(\psi + \varphi - \varrho) = G\sin\psi .$$

Aus dem Dreieck acc′ (Fig. 82a) folgt aber mit $\overline{ac} = l$, wenn das Gewicht für die Raumeinheit der Erdmasse mit γ bezeichnet wird,

$$dG = (\Delta\, acc')\cdot 1\cdot\gamma = -\tfrac{1}{2}l^2 d\varphi\cdot\gamma$$

Dieser Wert ist negativ zu setzen, weil G mit wachsendem $\sphericalangle\varphi$ abnimmt; in Verbindung mit Gl. (134) liefert er

(135) $$\tfrac{1}{2}l^2\gamma\cdot\sin(\varphi - \varrho)\sin(\psi + \varphi - \varrho) = G\sin\psi .$$

Zieht man die zur Stellungslinie $\overline{as}$ parallele Gerade cg, so wird auf der Böschungslinie die Strecke $\overline{ag} = n$ abgeschnitten und aus dem dabei gebildeten Dreieck acg folgt mit $\overline{ac} = l$

$$l : \sin\psi = n : \sin(\psi + \varphi - \varrho)$$

Wird auch noch von c das Lot auf n gefällt, dessen Länge mit f bezeichnet sei, so gilt $f : l = \sin(\varphi - \varrho)$. Mit den beiden letzten Werten folgt aus Gl. (135)

$$\frac{1}{2}l^2\cdot\gamma\cdot\frac{f}{l}\cdot\frac{n}{l}\cdot\sin\psi = G\sin\psi$$

oder

(136) $$G = \tfrac{1}{2}\cdot f\cdot n\cdot\gamma .$$

Da aber $\Delta afi \backsim \Delta acg$, so folgt $G : E = n : e$, wenn e die Länge cg bedeutet, und es wird

(137) $$E = G\cdot\frac{e}{n} = \frac{1}{2}fe\gamma .$$

Die Tiefe des Erdprismas ist gleich der Längeneinheit, es folgt somit aus Gl. (136)

$$\frac{G}{\gamma} = \frac{1}{2}f\cdot n = \Delta abc,$$

d. h. die Gleitlinie $\overline{ac}$ halbiert die Fläche abcga, so daß $\Delta abc = \Delta agc$ ist. Zieht man gh ∥ ac, so wird $\Delta abc = \Delta ach$ und es ist $\overline{bc} = \overline{ch}$. Wird nun noch bk ∥ $\overline{as}$ gezogen, und nennt man die Längen $\overline{ak} = a$, $\overline{ad} = b$, $\overline{cd} = c$ und $bc = ch = d$

so entstehen die ähnlichen Dreiecke $a\,c\,d$ und $g\,h\,d$ bz
$c\,g\,d$, und es gilt $\frac{b}{n} = \frac{c}{d}$ bzw. $\frac{b-n}{n-a} = \frac{c}{d}$, darau

$$n = \sqrt{a\,b}\,. \tag{138}$$

Es ist also $\overline{a\,g} = n$ die mittlere Proportional
und $\overline{a\,d} = b$, die in einfacher Weise zeichneris
werden kann, wie Fig. 83 zeigt.

Fig. 83.

Man schlägt über $\overline{a\,d}$ einen Halbkreis, errichte
k ein Lot, das den Halbkreis in l schneidet, und ma
Es ist alsdann $\overline{a\,g}$ die mittlere Proportionale zu
wie sich leicht mit Hilfe ähnlicher Dreiecke beweise
I. Teil, § 3, 4 b). Die Linie $b\,k$ ist parallel zur
linie, sie schließt also mit der Wand $a\,b$ den Winkel

Fällt der Punkt d aus der Zeichenfläche hera
der Punkt k parallel zur Geländelinie nach k′ au
ziert werden und alsdann ist über a b die gleiche K
wie über a d auszuführen. Der gefundene Punk
die natürliche Böschung nach g zurückzuholen.

Von g aus zieht man $g\,c \parallel b\,k$ und macht $\overline{g\,m}$
bei entsteht das schraffierte Dreieck $g\,c\,m$, dessen
γ multipliziert, den Erddruck E für die Tiefe 1 a
nach Gl. (137) ist $E = \frac{1}{2} f\,e\,\gamma$.

Wird aber $\sphericalangle abk > \sphericalangle abd$ (bei stark auswärts geneigten Wandflächen), dann ist die mittlere Proportionale nach Fig. 84 zu bestimmen. Man schlägt über ak einen Halbkreis, wobei bk unter dem $\sphericalangle \varrho + \varrho'$ gegen $\overline{ab}$ geneigt ist, errichtet in d ein Lot, welches den Halbkreis in l schneidet, und macht $al = ag$. Zieht man nun $cg \parallel bk$ und macht $gm = gc$, so ist das schraffierte Dreieck gcm bestimmt, dessen Inhalt, mit γ multipliziert, den Erddruck E angibt.

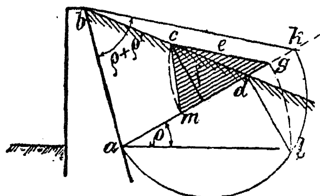


Fig. 84.

§ 38. Verteilung und Angriffspunkt des Erddrucks.

Auf eine senkrecht zur Geländeoberfläche stehende Höhe h (Fig. 85) entfällt nach Gl. (137) ein Erddruck $E = \frac{1}{2} f \cdot e \cdot \gamma$, und auf die Höhe h' entfällt $E' = \frac{1}{2} f' e' \gamma$. Aus Fig. 83 erkennt man aber, daß $f' : f = e' : e = h' : h$ wird, mithin ist

$$(139) \qquad E' = E \cdot \frac{h'^2}{h^2}.$$

Durch diese Gleichung, die eine Parabel a'c' mit dem Scheitel in a' darstellt, wird die die Zunahme des Erddrucks von oben nach unten veranschaulicht.

Der auf die Einheit der Wandhöhe entfallende Erddruck $\varDelta E$ wird

$$(140) \qquad \varDelta E = \frac{dE'}{dh'} = \frac{2 E h'}{h^2}.$$

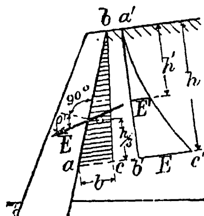


Fig. 85.

Durch diese Gleichung wird eine mit h' veränderliche Gerade dargestellt. Die Belastungsfläche der Wand ab wird somit ein Dreieck abc, dessen Grundlinie sein muß

$$(141) \qquad b = \frac{2 E}{h}.$$

Der **Angriffspunkt** des Erddrucks E liegt im Schwerpunkt des Dreiecks a b c, also in $\frac{1}{3}$ der Wandhöhe (h/3), und wirkt auf die Wand a b unter dem Neigungswinkel ϱ'.

In Fig. 83 ist also Δ c g m in ein Δ a b n zu verwandeln, dessen Höhe gleich der Wandhöhe h ist. Die Verwandlung ist gemäß Teil I, Fig. 7, S. 9 durchzuführen.

§ 39. Größe und Angriffspunkt des Wasserdrucks.

Der Druck des Wassers wirkt immer **senkrecht** gegen die ihm widerstehenden Flächen. Die Größe des Wasserdrucks auf eine schmale Fläche Δ f ist gleich dem Gewicht einer Wassersäule, deren Querschnitt gleich der gedrückten Fläche Δ f und deren Höhe gleich dem senkrechten Abstand h′ des Schwerpunktes dieser Fläche von der Wasseroberfläche ist. Der Wasserdruck ist daher mit der Höhe dieser Wassersäule veränderlich und läßt sich, wenn die Wandbreite gleich 1,0 gesetzt wird, durch ein gleichschenkliges Dreieck a b c darstellen, dessen Schenkellängen gleich der Wassertiefe h sind (Fig. 86). Wird die Dichte des Wassers (Einheitsgewicht) $\gamma = 1$ gesetzt, so folgt für die Größe des Wasserdrucks

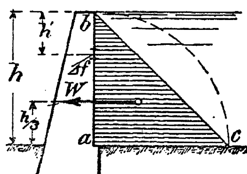


Fig. 86.

(142) $$W = \frac{h^2}{2}.$$

Dieser Wert ergibt sich in Tonnen, sobald h in Metern eingesetzt wird.

Der **Angriffspunkt** des Wasserdrucks liegt im Schwerpunkt des Dreiecks a b c, also in $\frac{1}{3}$ der Wandhöhe (h/3).

Register.